本书说明

本书前身《微分拓扑讲义》序言谈到：作为研究生基本课程的教材，应该有宽广的适应面，希望能兼顾"基本概念与基本技术"和"解决重要的问题"等方面.序言还特别强调了教材的启发性.本书对所述这些方面作了进一步的努力.适当增加了一些重要内容；并对某些在理解上可能产生困难的内容作了更多的启发式说明.

本书增补的参考文献[Ko]，是一本 1993 年出版的书.该书作者 Kosinski 在引言中谈到：每个数学领域在飞速发展时期之后总会留下一些空缺与不足之处，诸如"口传定理"以及某些不完整甚至不正确的证明.对于一个有时把"容易看出"当作证明方法的学科尤其如此.该书的作者希望能填补某些空缺.但他深感"精确细致"与"迂腐"之间的界限往往很不容易区分.笔者赞赏 Kosinski 的见解和所作的努力.**笔者强调指出：既要精确细致，又不要陷入迂腐，关键在于重视叙述的启发性.**

呈现在读者面前的这本《微分拓扑新讲》，与《微分拓扑讲义》相比增加了不少内容.第一章新增加的附录，首先介绍函数芽(germ)的概念，使得有关的叙述与讨论在逻辑上更为严谨；随后较具体地介绍余切空间的概念.本书的第一章，第二章和全书最后的附录 δ 可以作为流形论的一个简明扼要的导引.第四章新增加较长的附注 4.4，对向量丛的抽象概念与具体体现之间的联系作启发式的说明.第六章新增加了介绍带边流形的领圈邻域与倍流形的一节；有关 Morse 函数的一节也增加了一些内容.其他新增加的内容还很多，这里就不再一一列举了.除了新增加的材料而外，叙述中还随处补充了一些简明的启发性的说明与附注.

本书前身《微分拓扑讲义》曾于 2000 年荣获中华人民共和国

教育部颁发的科学技术进步奖二等奖.本书在其基础上又作了进一步的努力,希望能为读者提供一本选材更充实丰富,叙述更具有启发性的教材与参考书.

《微分拓扑讲义》序言的基本叙述完全适用于此书,因此将其稍作修改仍作为本书的序言.

张 筑 生

2002 年 1 月于北京大学

序　言

微分拓扑是 20 世纪成就和影响最大的数学分支之一. 因与微分拓扑有关的研究而获得 Fields 奖殊荣的数学家就有好几位. 许多国家的著名大学都将“微分拓扑”列为大学生和研究生的重要课程并且列为博士资格考试的重要科目. 微分拓扑在其他学科领域也有重要的应用. 1983 年诺贝尔经济学奖的得主 Gérard Debreu 在获奖演说中，对于微分拓扑的方法帮助他实现关键性的突破曾有生动的描述.（该获奖演说的译文“数学思辨模式的经济理论”载于《数学进展》杂志第 17 卷第 3 期（1988 年 7 月）.）

微分拓扑的教材，较早且影响深远的有 1958 年 Milnor 在 Princeton 大学讲授微分拓扑的讲义（序言附记中所列的参考书[1]）. 到了 20 世纪 60 年代，先后出现了两本讲述微分拓扑的非常精彩的小册子. 1963 年出版的 Munkres 的《初等微分拓扑学》（序言附记中的[2]），着重介绍某些最基本的微分拓扑技术手段（他所称的“初等”技术）. 1965 年出版的 Milnor 的《从微分观点看拓扑》（序言附记中的[3]）更为人们所珍爱. 该书侧重于用微分的技术手段解决拓扑问题，对许多经典的拓扑定理作了简单明快引人入胜的处理. 稍后出版的微分拓扑教材还有序言附记中列出的[4]，[5]和[6]等，其中[4]着重于用微分技术解决拓扑问题（可以看成是[3]的延伸）；[6]着重于介绍基本概念与基本技术；[5]则对两方面都有所兼顾.

笔者多年来在北京大学给研究生和部分高年级大学生讲授微分拓扑课程. 这本讲义就是整理积累的讲稿写成的. 作为研究生基本课程的教材，应该有较宽广的适应面. 笔者希望能兼顾“基本技术”与“解决重要而又有魅力的问题”等方面. 序言附记中列出的参

考书[1]～[6]都可作为阅读本书的重要参考资料(书末还列有其他参考文献). 学习这门课程的预备知识是有关微分流形的一些最基本的概念与事实. 本书的第一章对所需的预备知识作了简单扼要的讲解(书中的第一章，第二章和最后的附录δ是流形论基础知识的一个概述). 本书第三章至第六章重点讲解微分拓扑学的一些最基本的概念并重点介绍一些典型的技巧方法，这些都是学习微分拓扑所必须掌握的. 第七章至第十二章一方面继续讲解某些重要概念，另一方面着重于介绍基本概念和典型技巧方法的广泛应用. 各章所证明的著名定理对数学的各分支及其他许多学科的研究与应用都是非常重要的. 在整理讲稿的时候，笔者曾为叙述的启发性而煞费苦心，希望能避免过分的形式化而强调问题的实质. 第四章讲解向量丛与管状邻域、映射的光滑化与同伦的光滑化等非常重要的内容，却从很简单的引例开始，力图做到形象生动并且深入浅出. 对初学者而言，在各章的学习过程中自己举出一些实例并且画一些适当的示意图形以帮助理解，仍然是很有必要的. 笔者热诚欢迎读者们的意见和建议. 笔者诚挚地感谢姜伯驹教授和李忠教授对本书出版的支持，感谢责任编辑刘勇所做的细致工作.

根据笔者的经验，本书的材料适用于每周授课 3 学时的一学期课程. 如果希望对内容作适当的删减以开设一个较少学时的课程，那么以下一些建议或许有所帮助：

(1) 如果学生对点集拓扑和微分流形的基础知识已经有了较好的理解，那么第一章和第二章的大部分内容都不必在课堂上讲授.

(2) 第三章和第四章所介绍的嵌入与管状邻域技术是很重要的. 但应强调的是 Whitney 嵌入定理与管状邻域定理的结论. 可以概要介绍这些定理证明的基本思路与重要的技术手段. 至于这些定理证明的细节处理，在讲课的时候却是大可省略的.

(3) 第五章 §3 和 §4 的材料亦可省略. 因为在该章的 §5 中利用参数横截定理所作的关于横截逼近定理的证明，适用于无边

流形与带边流形这两种情况.

(4) 第六章 §4 的材料可以留给学生自己去看,不一定在课堂上详细讲述.

(5) 第八章至第十二章的材料可以根据实际情况有选择有重点地讲述其中的一部分. 例如,可以重点地讲述模 2 情形的映射度和相交数,然后通过类比简单地介绍定向情形的相应结论(省去大部分证明).

张 筑 生

1995 年 7 月写于北京大学

2002 年 1 月稍作修改

附记 主要参考书介绍

[1] Milnor, J., *Differential Topology*. (译文载入《从微分观点看拓扑》一书(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.)

[2] Munkres, J., *Elementary Differential Topology*, *Princeton* University Press, 1963. (李培信译,《初等微分拓扑学》,上海科学技术出版社,1966.)

[3] Milnor, J., *Topology from a Differential Viewpoint*, University of Virginia Press, 1965. (熊金城译,《从微分观点看拓扑》,上海科学技术出版社,1983.)

[4] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., 1974.

[5] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[6] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.

关于编号的说明

项目编号　在每一章里，引理、命题、定义、定理、注记和例等项目用两个数码统一编号：前一数码表示项目所在的节，后一数码表示项目在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开.

公式编号　在每一章里，公式用带有圆括弧的两个数码编号：前一数码表示公式所在的节，后一数码表示公式在该节中的顺序，两个数码之间有小圆点隔开.

项目与公式的引用　在同一章中引用时，直接写出所引项目或公式的编号. 在不同章中引用时，先要指明所引项目或公式所在的章，然后才是其编号.

图或图表的编号　在全书中，图和图表统一按顺序编号.

关于某些符号与用语的说明

常以 id：$X \to X$ 表示集合 X 的恒同映射(id 将 X 的每一点映到自己).

常以 $\# E$ 表示集合 E 的基数(对于有限集合,就是该集合中的元素个数).

如无另外的说明,讲义中所谈到的"可数"均表示"至多可数",即包括"有限"的情形.

对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 的有限子集 F,常以 $\max F$ 表示 F 中的最大数,并用 $\min F$ 表示 F 中的最小数.对于实数集 $\boldsymbol{R}$ 中的更一般的(不一定有限的)子集 G,常以 $\sup G$ 表示 G 中数的上确界,并用 $\inf G$ 表示其下确界.

符号 sgn 表示这样一个实函数:

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{对于 } x > 0; \\ 0, & \text{对于 } x = 0; \\ -1, & \text{对于 } x < 0. \end{cases}$$

这里和以后许多类似的情形,我们都以符号" := "表示"定义为",即表示"右边的式子是左边记号的定义".

对于 $n \times n$ 方阵 A,常以 $\det A$ 表示其行列式.对于 $m \times n$ 矩阵 B,约定以 $\operatorname{rank} B$ 表示它的秩.

对于拓扑空间的子集 S,常以

$$\operatorname{int} S$$

表示 S 的内部(即由 S 的全体内点组成的集合).还约定以

$$\overline{S}$$

表示 S 的闭包(即包含 S 的最小闭集).

设 (X, d) 是距离空间.对于 X 的非空子集 E 和 F,约定记

$$d(E,F) := \inf_{x\in E, y\in F}\{d(x,y)\}.$$

通常以 d(· , ·)表示距离函数,但对于可能引起混淆的情形,也往往以 dist(· , ·)表示距离函数.

常用小写的拉丁字母,例如 x,表示空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中的点. 这时,常以带上标(或带下标)的 x 表示 x 的各分量,例如

$$x = (x^1, \cdots, x^m) \in \boldsymbol{R}^m.$$

常以 $\|x\|$ 表示 x 的 Euclid 范数,即

$$\|x\| := \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2}.$$

对于定义于 $D \subset \boldsymbol{R}^m$ 并且映入 $\boldsymbol{R}^n$ 的函数 f,也可用附以上标(或下标)的办法指明其分量,例如:

$$f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x)),$$

其中 $x = (x^1, \cdots, x^m) \in D$. 对类似这样的情形,上标的意义可以从行文中看出,不至于被误认成幂指数.

如果 D 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,

$$f(x) = (f^1(x), \cdots, f^n(x))$$

是定义于 D 上的连续可微映射,那么该映射的 Jacobi 行列式(常简记为 $J_f(x)$)指的是

$$\frac{\partial(f^1, \cdots, f^n)}{\partial(x^1, \cdots, x^n)} := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}.$$

本书常用"在 p 点邻近"的说法表示"在 p 点的某个邻域中"这样的意思. 例如:"f 是在 p 点邻近有定义的 C^r 函数"意指"函数 f 在 p 点的某个开邻域内有定义,并且在该邻域内是 r 阶连续可微的".

从第二章起,所提到的流形均被认为是满足第二可数公理的.

我们还约定用方框记号"□"表示:"证明完成"或者"证明较简单,不再写出了"这样的意思.

目　　录

关于编号的说明 ………………………………………………… (11)
关于某些符号与用语的说明 ………………………………………… (12)
第一章　预备知识……………………………………………………… (1)
§1　逆函数定理 ………………………………………………………… (1)
§2　代数基本定理的“拓扑”证明 …………………………………… (6)
§3　微分流形 ………………………………………………………… (11)
§4　可微映射 ………………………………………………………… (18)
§5　切空间与切映射 ………………………………………………… (24)
附录α　函数芽的概念与余切空间 ………………………………… (30)
练习A ……………………………………………………………………… (32)

第二章　第二可数性质，仿紧性质与单位分解……………… (34)
§1　第二可数性质 …………………………………………………… (34)
§2　局部紧性质……………………………………………………… (36)
§3　仿紧性质 ………………………………………………………… (38)
§4　单位分解 ………………………………………………………… (40)
§5　紧流形嵌入Euclid空间 ………………………………………… (45)
练习B ……………………………………………………………………… (47)

第三章　Whitney嵌入定理 ……………………………………… (49)
§1　零测集 …………………………………………………………… (49)
§2　Whitney浸入定理 ……………………………………………… (55)
§3　常态映射与Whitney嵌入定理………………………………… (67)
练习C ……………………………………………………………………… (74)

第四章　向量丛与管状邻域定理,映射的光滑化与同伦的光滑化 ……………… (76)
§1　引例 ……………… (76)
§2　向量丛的概念 ……………… (82)
§3　子丛,Riemann 度量,正交补丛 ……………… (90)
§4　管状邻域定理证明的准备 ……………… (92)
§5　管状邻域定理 ……………… (107)
§6　映射的光滑化与同伦的光滑化 ……………… (111)
附录 β　更一般的管状邻域定理 ……………… (117)
练习 D ……………… (118)

第五章　正则值与横截性 ……………… (119)
§1　正则值与 Sard 定理 ……………… (119)
§2　横截性 ……………… (123)
§3　横截逼近定理 ……………… (127)
§4　关于映射的 C^r 拓扑与 C^r 意义下的逼近 ……………… (133)
§5　参数横截性定理与涉及带边流形的定理 ……………… (137)
附录 γ　Sard 定理的证明 ……………… (147)
练习 E ……………… (153)

第六章　向量场与流,Morse 函数 ……………… (155)
§1　向量场与流 ……………… (155)
§2　流形的匀齐性 ……………… (161)
§3　带边流形的领圈邻域与倍流形 ……………… (164)
§4　Morse 函数 ……………… (172)
练习 F ……………… (193)

第七章　一维流形的分类与 Brouwer 不动点定理 ……………… (195)
§1　一维微分流形的分类 ……………… (195)
§2　Brouwer 不动点定理 ……………… (202)
练习 G ……………… (206)

第八章　模 2 映射度与 Borsuk-Ulam 定理 ………………（207）

§1　模 2 映射度 ……………………………………………（208）

§2　模 2 环绕数 ……………………………………………（215）

§3　Borsuk-Ulam 定理……………………………………（220）

练习 H ………………………………………………………（225）

第九章　定向映射度与 Hopf 定理 …………………………（227）

§1　可定向流形 ……………………………………………（227）

§2　定向映射度与定向环绕数 ……………………………（233）

§3　Hopf 定理………………………………………………（243）

练习 I ………………………………………………………（253）

第十章　局部映射度，Leray 乘积公式与 Jordan-Brouwer 分离定理……………………………………………（254）

§1　映射度定义的局部化……………………………………（254）

§2　Leray 乘积公式…………………………………………（262）

§3　Jordan-Brouwer 分离定理 ……………………………（272）

§4　紧致超曲面的分离性质 ………………………………（277）

练习 J ………………………………………………………（283）

第十一章　相交数，向量场奇点的指标与 Poincaré-Hopf 定理……………………………………………（285）

§1　模 2 相交数 ……………………………………………（285）

§2　定向相交数 ……………………………………………（287）

§3　相交数定义的局部化……………………………………（294）

§4　向量丛截面的光滑化与横截逼近 ……………………（298）

§5　向量场孤立零点的指标 ………………………………（300）

§6　Poincaré-Hopf 定理 …………………………………（305）

练习 K ………………………………………………………（311）

第十二章　映射度的积分表示与 Gauss-Bonnet 公式 ……（312）

§1　映射度的积分表示 …………………………………… (312)
§2　Gauss-Bonnet 公式 …………………………………… (318)
练习 L ……………………………………………………… (322)
附录 δ　外微分形式的积分与一般 Stokes 定理……………… (323)
参考文献…………………………………………………… (345)
术语索引…………………………………………………… (347)
符号索引…………………………………………………… (350)

第一章　预备知识

阅读本书的预备知识是有关微分流形和可微映射的一些最基本的概念. 本章将对这部分内容作一个简明扼要的介绍.

逆函数定理是微分流形概念的基石. 本章§1按照我们需要的形式陈述并证明逆函数定理，着重强调该定理的拓扑意义. §2所介绍的代数基本定理的拓扑证明，是显示逆函数定理拓扑意义的一个范例. 经典定理的别开生面的新证明总是能引起人们浓厚的兴趣. §3，§4和§5分别介绍微分流形，可微映射和切空间等概念. 附录α介绍余切空间的概念.

§1　逆函数定理

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$f:\ \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射($r\geqslant 1$)，并设 $a\in\Omega$. 逆函数定理借助于**线性映射** $A=\mathrm{D}f(a)$**可逆**这样的条件，判断 f 在 a 点某个开邻域上的局部微分同胚性质.

引理 1.1　设 $A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 是一个可逆线性映射，则存在正实数 σ，使得

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad \forall x\in\boldsymbol{R}^n.$$

证明　因为 A 是可逆线性映射，所以

$$\xi\neq 0\Longrightarrow A\xi\neq 0.$$

易知 $\|Ax\|$ 是变元 x 的连续函数，因而它在球面

$$S=\{\xi\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\|\xi\|=1\}$$

上取得最小值

$$\inf_{\xi\in S}\{\|A\xi\|\}=\sigma>0.$$

因为对任何非零的 x 有 $\frac{x}{\|x\|}\in S$，所以

$$\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\geqslant \sigma,$$

即

$$\|Ax\|\geqslant \sigma\|x\|.$$

上式对 $x=0$ 显然也成立. □

引理 1.2 设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，

$$f: G\to \boldsymbol{R}^n$$

是 C^r 映射 $(r\geqslant 1)$，$a\in G$. 如果 $\mathrm{D}f(a)=A$ 是可逆线性映射，那么存在 a 点的开邻域 $U\subset G$ 和实数 $\omega>0$，使得

$$\|f(x')-f(x)\|\geqslant \omega\|x'-x\|,\quad \forall x',x\in U.$$

因而 f 限制在 U 上是一个单映射.

证明 记 $\varphi(x)=x-A^{-1}f(x)$，则有

$$\mathrm{D}\varphi(x)=I-A^{-1}\mathrm{D}f(x),$$
$$\mathrm{D}\varphi(a)=0.$$

因而存在 a 点的开邻域 $U\subset G$，使得限制在 U 上有

$$\|\mathrm{D}\varphi(x)\|\leqslant \rho<1,$$

这里 ρ 是取定的介于 0 和 1 之间的实数，例如可取 $\rho=1/2$. 于是，对于任何 $x',x\in U$ 有

$$\|\varphi(x')-\varphi(x)\|\leqslant \rho\|x'-x\|.$$

又因为

$$f(x')=A(x'-\varphi(x')),\quad f(x)=A(x-\varphi(x)),$$

所以有

$$\begin{aligned}\|f(x')-f(x)\|&=\|A((x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant \sigma\|x'-\varphi(x')-(x-\varphi(x))\|\\&\geqslant \sigma(\|x'-x\|-\|\varphi(x')-\varphi(x)\|)\\&\geqslant \sigma(1-\rho)\|x'-x\|\end{aligned}$$

$$= \omega \| x' - x \|,$$

这里的 σ 是引理 1.1 中所述的正实数，$\omega=\sigma(1-\rho)>0$. □

引理 1.3 设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$f: G \to \boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射 ($r \geqslant 1$). 如果对任何 $x \in G$，线性映射 $\mathrm{D}f(x)$ 都是可逆的，那么 $f(G)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集.

证明 任取 $a \in G$，将证 $f(G)$ 包含 $b=f(a)$ 的一个开邻域.

根据引理 1.2，存在 a 点的开邻域 $U \subset G$，使得 f 限制在 U 上是单映射. 取足够小的实数 $\lambda>0$，使得

$$\overline{B} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x - a\| \leqslant \lambda\} \subset U.$$

考察球面 $S=\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x-a\|=\lambda\}$. 根据 f 在 U 上的单一性，可以断定

$$f(x) \neq f(a), \quad \forall x \in S.$$

因而

$$\inf_{x \in S} \{\|f(x) - f(a)\|\} = \mu > 0.$$

再考察 $b=f(a)$ 的开邻域 $W=\{y \in \boldsymbol{R}^n \mid \|y-b\|<\mu/2\}$. 对任意取定的 $y \in W$，定义这样一个函数

$$\begin{aligned} \psi: U &\to \boldsymbol{R}^n \\ x &\mapsto \|f(x) - y\|^2. \end{aligned}$$

因为对 $y \in W$ 有 $\|y-f(a)\|=\|y-b\|<\mu/2$，所以对 $x \in S$，$y \in W$ 有

$$\begin{aligned} \|f(x) - y\| &\geqslant \|f(x) - f(a)\| - \|y - f(a)\| \\ &> \mu - \mu/2 = \mu/2. \end{aligned}$$

于是对 $x \in S$ 有

$$\psi(x) = \|f(x) - y\|^2 > \mu^2/4 > \|f(a) - y\|^2 = \psi(a).$$

由此可知：ψ 在 $\overline{B}$ 上的最小值只能在 $\overline{B}$ 内部的某点 c 取得，因而在该点有

$$\frac{\partial \psi(c)}{\partial x^k} = 0, \quad k = 1, \cdots, n.$$

也就是

$$(1.1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^j(c)}{\partial x^k}(f^j(c) - y^j) = 0, \quad k = 1, \cdots, n.$$

又因为

$$\det\left(\frac{\partial f^j(c)}{\partial x^k}\right) \neq 0,$$

所以由(1.1)可得

$$f^j(c) = y^j, \quad j = 1, \cdots, n.$$

这就是说，对于任何 $y \in W$，存在 $c \in G$，使得 $f(c) = y$. □

定理 1.4（逆函数定理） 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$f: \Omega \to \boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射（$r \geqslant 1$），$a \in \Omega$. 如果 $\mathrm{D}f(a)$ 是可逆线性映射，那么存在 a 点的开邻域 U 和 $b = f(a)$ 点的开邻域 V，使得 f 限制到 U 上是从 U 到 V 的 C^r 同胚.

证明 先取 a 点的开邻域 $G \subset \Omega$，使得

$$\det(\mathrm{D}f(x)) \neq 0, \quad \forall x \in G.$$

再取 a 点的开邻域 $U \subset G$ 如引理 1.2 中所述. 根据引理 1.2 和引理 1.3 我们有

(1) $f|U$ 是单映射；

(2) $V = f(U)$ 是 $b = f(a)$ 点的开邻域.

下面，我们来证明：

(3) $g = (f|U)^{-1}: V \to U$ 是 C^r 映射.

首先，将 $x' = g(y + \eta)$，$x = g(y)$ 代入引理 1.2 的不等式

$$\|f(x') - f(x)\| \geqslant \omega \|x' - x\|,$$

我们得到

$$(1.2) \qquad \|g(y + \eta) - g(y)\| \leqslant \frac{1}{\omega}\|\eta\|.$$

这证明了逆映射 g 的连续性. 为了证明 g 的可微性，将利用如下的关系式：

$$(1.3)\qquad \eta = f(g(y+\eta)) - f(g(y)).$$

记 $A=\mathrm{D}f(g(y))$，利用微分的定义并注意到(1.2)和(1.3)式可得

$$\begin{aligned}\eta - A(g(y+\eta) - g(y))\\ &= f(g(y+\eta)) - f(g(y)) - A(g(y+\eta) - g(y))\\ &= o(\|g(y+\eta) - g(y)\|) = o(\|\eta\|).\end{aligned}$$

由此得到

$$g(y+\eta) - g(y) - A^{-1}\eta = o(\|\eta\|).$$

这证明了逆映射 g 的可微性，并求出

$$(1.4)\qquad \mathrm{D}g(y) = (\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}.$$

由于方阵取逆的运算是(任意阶)连续可微的，f 是 r 阶连续可微的($r\geqslant 1$)，g 是连续的，从(1.4)式可以看出 $\mathrm{D}g(y)$对 y 的连续性. 这证明了 g 是 C^1 映射.

对于 $r>1$ 的情形，还须判断 g 的 k 阶连续可微性，这里 $1<k\leqslant r$. 事实上，从 $\mathrm{D}f$ 和 g 的 $k-1$ 阶连续可微性能够推断

$$\mathrm{D}g(y) = (\mathrm{D}f(g(y)))^{-1}$$

的 $k-1$ 阶连续可微性，这就是 g 的 k 阶连续可微性. □

为了说明逆函数定理的拓扑意义，我们来介绍 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中开集之间的微分同胚的概念. 本书稍后的讨论中，将在更一般意义下介绍微分同胚的概念.

设 G 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$g: G\to\boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射. 如果 $H=g(G)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，并且存在 C^r 映射 $h: H\to\boldsymbol{R}^n$，满足条件

(1) $h(H)=G$；

(2) $h\circ g=\mathrm{id}_G$, $g\circ h=\mathrm{id}_H$，

那么我们就称 $g: G\to H$ 是 **C^r 同胚映射**. (当然 $h: H\to G$ 也是

C^r 同胚映射，h 就是 g 的 C^r 逆映射）. C^r 同胚映射常简称为 C^r 同胚（人们也说开集 G 与开集 H 相互 C^r 同胚）. $r\geqslant 1$ 情形的 C^r 同胚统称为**微分同胚**. C^∞ 同胚通常称为**光滑同胚**.

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$f: \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射，$a\in\Omega$. 如果存在 a 点的开邻域 $U\subset\Omega$ 和 $b=f(a)$ 点的开邻域 V，使得

$$f|U: U\to V$$

是 C^r 同胚，那么我们就说 f 在 a 点邻近是局部 C^r 同胚. 如果对所有的 $a\in\Omega$，映射 $f: \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 在 a 点邻近都是局部 C^r 同胚，那么就称 $f: \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 是局部 C^r 同胚映射. $r\geqslant 1$ 情形的局部 C^r 同胚统称为**局部微分同胚**. 局部 C^∞ 同胚常称作**局部光滑同胚**.

逆函数定理的拓扑意义在于：仅仅依据线性映射 $A=\mathrm{D}f(a)$ 可逆的条件，就能判断 C^r 映射 $f: \Omega\to\boldsymbol{R}^n$ 在 a 点邻近的局部 C^r 同胚性质（当然要求 $r\geqslant 1$）.

§2 代数基本定理的“拓扑”证明

经典的代数基本定理断言：**任何不是常数的复系数代数多项式至少有一个复根**. 1799 年以来，代数基本定理已经有了为数众多的证明，但没有一个证明是纯代数的. 下面介绍的证明是逆函数定理的有趣的应用.

将要介绍的证明没有用到复分析的任何稍深入的知识，只是为了书写简便，采纳了复函数微商的记号而已.

首先回忆复函数微商的定义. 设复函数 $\varphi(z)$ 在 c 点邻近有定义. 如果存在极限

$$\lim_{z\to c}\frac{\varphi(z)-\varphi(c)}{z-c},$$

那么就称这极限为复函数 φ 在 c 点的**微商**，记为 $\varphi'(c)$.

将 $x+\mathrm{i}y$ 看成 (x,y)，我们可以将复平面 $\boldsymbol{C}$ 的拓扑与实平

面 $\boldsymbol{R}^2$ 的拓扑等同视之. 复平面 $\boldsymbol{C}$ 的开子集 U 也就是实平面 $\boldsymbol{R}^2$ 的开子集. 我们可以将映射

$$\varphi : U \to \boldsymbol{C}$$

表示成

$$\varphi(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y).$$

于是, 映射 $\varphi: U \to \boldsymbol{C}$ 决定了这样一个映射:

$$(2.1)\qquad \begin{cases} \quad U \ \to \boldsymbol{R}^2, \\ (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y)). \end{cases}$$

引理 2.1 设 U 是 $\boldsymbol{C}$ 中的开集(也看作 $\boldsymbol{R}^2$ 中的开集), $\varphi: U \to \boldsymbol{C}$是可微复函数. 则由 φ 所决定的形如(2.1)那样的映射在(a,b)点处的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |\varphi'(c)|^2,$$

其中 $c = a + \mathrm{i}\,b$.

证明 沿着平行于 x 轴的方向和平行于 y 轴的方向考察极限

$$\lim_{z \to c} \frac{\varphi(z) - \varphi(c)}{z - c},$$

我们看到

$$\varphi'(c) = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}(a,b).$$

因而有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(a,b)}, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(a,b)} = -\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(a,b)},$$

$$|\varphi'(c)|^2 = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)_{(a,b)}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(a,b)}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_{(a,b)}. \qquad \square$$

引理 2.2 考察函数 $\varphi(z)=z^m(m\geqslant 1)$. 设 b 是非零复数，则存在定义于 b^m 邻近的连续可微的复函数 ψ，满足

$$(\psi(w))^m = w, \quad \psi(b^m) = b.$$

证明 因为

$$\varphi'(b) = mb^{m-1} \neq 0,$$

所以（根据逆函数定理）φ 是从 b 点邻近到 b^m 点邻近的局部微分同胚，因而存在定义于 b^m 点邻近的连续可微的逆函数 ψ，它满足

$$\varphi(\psi(w)) = w, \quad \psi(\varphi(z)) = z.$$

由此得到

$$(\psi(w))^m = w, \quad \psi(b^m) = b. \qquad \square$$

注记 在 $b^m\in \boldsymbol{C}\backslash\{0\}$ 邻近，可以确定多值根式函数 $\sqrt[m]{\quad}$ 的一个分支 ψ，满足条件

$$\psi(b^m) = b.$$

引理 2.2 的关键意义在于：依据逆函数定理判定 ψ 的连续可微性质.

引理 2.3 设 $n\geqslant 1$，则 n 次复系数多项式 $f(z)$ 所定义的从 $\boldsymbol{C}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的映射是一个**开映射**. 这就是说，任何一个开集 $G\subset \boldsymbol{C}$ 经映射 f 之后的像集 $f(G)$ 仍是 $\boldsymbol{C}$ 中的开集. 特别地，$f(\boldsymbol{C})$ 是 $\boldsymbol{C}$ 中的开集.

证明 只须对任意的 $c\in G$，证明存在 c 点的开邻域 $U\subset G$，使得 $f(U)$ 包含了 $f(c)$ 点的一个开邻域 W. 为此，我们将 $f(z)$ 表示为

$$f(z) = f(c) + (z - c)^m g(z),$$

其中 $m \geqslant 1$，$g(z)$是一个 $n-m$ 次复系数多项式，适合条件 $g(c) \neq 0$. 以下分两种情形讨论.

情形 1：$m=1$. 对这种情形，

$$f'(c) = g(c) \neq 0.$$

根据逆函数定理，f 将 c 点的一个开邻域 $U \subset G$ 映成 $f(c)$点的开邻域 W.

情形 2：$m>1$. 对这种情形，我们首先选取 $b \in \mathbf{C}$ 适合 $b^m = g(c)$（即取 b 为 $g(c)$的任意一个 m 次方根）. 根据引理 2.2，存在定义于 $b^m = g(c)$点邻近的连续可微函数 ψ，适合

$$(\psi(w))^m = w, \quad \psi(g(c)) = b \neq 0.$$

于是，我们可以在 c 点邻近将 f 表示为

$$f(z) = f(c) + ((z - c)h(z))^m,$$

其中 $h(z) = \psi(g(z))$是连续可微函数，并且满足条件

$$h(c) = \psi(g(c)) = b \neq 0.$$

考察这样两个函数：

$$F(z) = (z - c)h(z), \quad \Phi(\zeta) = \zeta^m.$$

因为对于 $z \to c$ 有

$$\frac{F(z) - F(c)}{z - c} = h(z) \to h(c),$$

所以
$$F'(c) = h(c) \neq 0.$$

根据逆函数定理，F 将 c 点的一个开邻域 $U \subset G$ 映射成为以 $F(c)=0$为中心的一个开圆盘 D. 映射 Φ 又将开圆盘 D 映成以 0 为中心的开圆盘 V（覆盖了 m 重）. 限制在 U 上，我们可以将 f 写成：

$$f(z) = f(c) + \Phi(F(z)).$$

由此得知：$f(U)$包含了以 $f(c)$为中心的开圆盘 W. 这里的 $W = f(c) + V$ 是由开圆盘 V 经过平行移动将中心移到 $f(c)$而

得到的. □

引理 2.4 设 $n\geqslant 1$, $f: \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ 是由 n 次复系数多项式 $f(z)$ 所定义的映射，则像集 $f(\boldsymbol{C})$ 是一个闭集.

证明 设 $w_k=f(z_k)\in f(\boldsymbol{C})$, $k=1,2,\cdots$，满足条件

$$\lim_{k\to\infty} w_k = w_0\in\boldsymbol{C}. \tag{2.2}$$

我们来证明：存在 $z_0\in\boldsymbol{C}$，使得 $f(z_0)=w_0$.

首先可以断定 $\{z_n\}$ 是有界序列. 否则，将有 $\{z_k\}$ 的子序列趋于 ∞，与 (2.2) 矛盾. 其次，从有界序列 $\{z_k\}$ 中可以选出收敛子序列 $\{z_{k_s}\}$. 设

$$\lim_{s\to\infty} z_{k_s} = z_0,$$

则有 $$f(z_0) = \lim_{s\to\infty} f(z_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} w_{k_s} = w_0. \qquad \square$$

定理 2.5（代数基本定理） 设 $n\geqslant 1$，则 n 次复系数多项式至少有一个复根.

证明 根据引理 2.3 和引理 2.4，$f(\boldsymbol{C})$ 是复平面 $\boldsymbol{C}$ 上一个既开又闭的集合. 因为 $\boldsymbol{C}$ 是连通的，并且显然 $f(\boldsymbol{C})\neq\varnothing$，所以只能有

$$f(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}.$$

这证明了对任何 $w\in\boldsymbol{C}$，方程 $f(z)=w$ 都有解. 特别地，方程 $f(z)=0$ 至少有一个复根. □

利用引理 2.3，还可以作出代数基本定理的另一个证明. 该证明可以看成是经典的 Argand-Cauchy 证明的更为直观的拓扑摹本.

代数基本定理的又一证明 因为 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$，所以存在 $R>0$，使得

$$|z|\geqslant R \Longrightarrow |f(z)|>|f(0)|.$$

记

$$K=\{z\in\boldsymbol{C} \,\big|\, |z|\leqslant R\},$$

则函数 $|f(z)|$ 在 K 上的最小值必定在 K 内部的某点 c 取得. 我们指出这时必有 $f(c)=0$. 否则,因为 f 将 c 点的一个开邻域 U（不妨设 $U\subset K$）映成 $f(c)$点的一个开邻域 W,所以必有 W 中的某点 $w=f(z)$使得

$$|f(z)| < |f(c)|,$$

但这与 $|f(c)|$ 的最小性矛盾(参看图 1). □

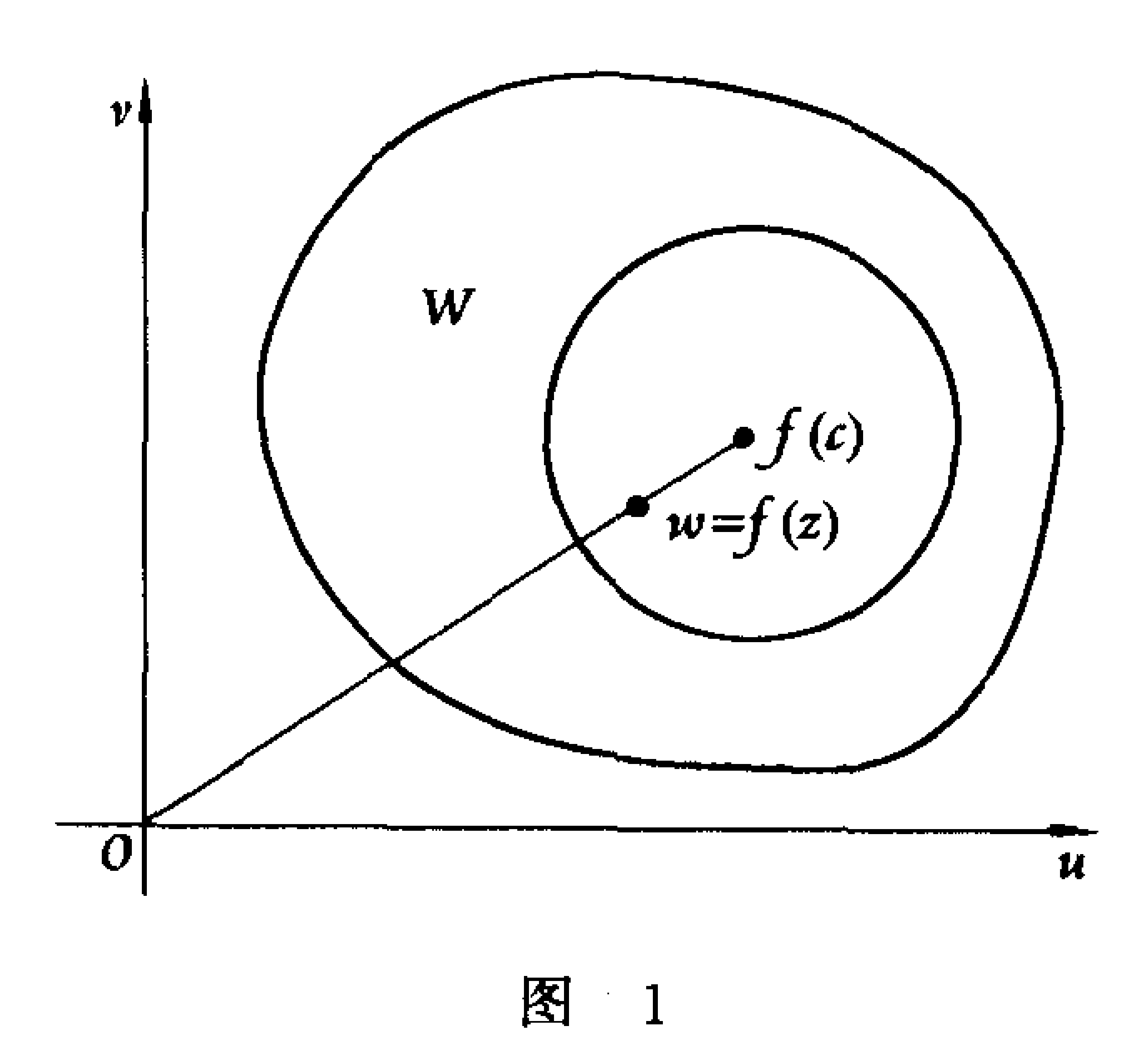


图 1

§3 微分流形

按照 Bourbaki 学派的观点,数学研究的对象是各种结构. 通常的 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^m$ 至少有两种重要的结构：拓扑结构和代数结构(线性空间结构). 函数连续性的概念只涉及其中第一种结构. 可微性的概念则涉及两种结构,因为微分 $\mathrm{D}f(x)=A$ 的定义牵涉到线性运算和极限概念：

$$f(x+h)-f(x)-Ah=o(\|h\|).$$

可微性的概念可以推广到有拓扑结构和线性代数结构这两种结构的其他空间,例如 Banach 空间(甚至更一般的拓扑线性空间). 这些有整体线性结构的空间,应该被看成“平直”的空间. 人们不满足于“平直”空间的微分学,希望能进一步研究“弯曲”

空间的微分学，这不仅是数学发展自然的要求，也是力学、物理与其他许多应用数学的学科的需要.

经验告诉我们，如果不撕破，不重叠就无法把球面摊成平面区域(半球面是可以摊成平面区域的). 拓扑学也证明了球面不可能与平面区域同胚. 正因为如此，要把地球表面画成地图，就非得把球面"撕破"不可. 有好多种"撕破"的办法，对应着世界地图的好些种画法.

像球面这样的几何对象当然不可能有整体的线性结构. 但可微性的定义只涉及到函数在一点邻近的性质. 换句话说，这定义是"局部"的. 对于球面 S 这样的几何对象，如果在某点 $p \in S$ 的邻近 U 能引入局部坐标

$$\varphi : U \to \boldsymbol{R}^2,$$

那么对于函数 $f : S \to \boldsymbol{R}$ 自然可以讨论复合函数

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \boldsymbol{R}$$

在 p 点邻近的可微性(参看图 2).

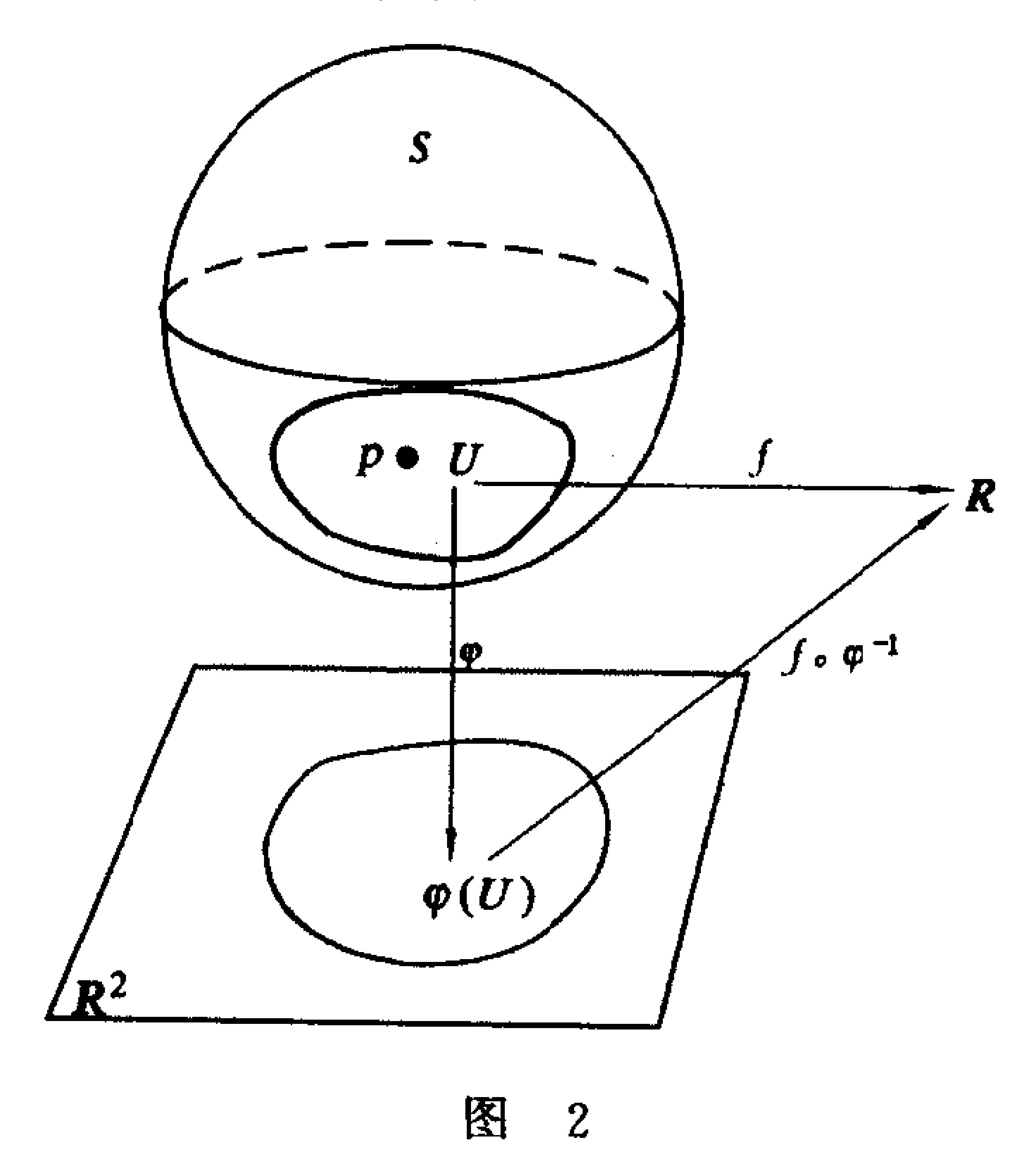


图 2

但若在点 p 邻近，引入不同的局部坐标：

$$\varphi: U \to \boldsymbol{R}^2, \quad \psi: V \to \boldsymbol{R}^2.$$

函数 $f: S \to \boldsymbol{R}$ 在 p 点邻近也就有两种不同的局部表示

$$f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \boldsymbol{R}, \quad f \circ \psi^{-1}: \psi(V) \to \boldsymbol{R}.$$

或许会发生这样的情形：f 的这两种局部坐标表示有不同的可微性质. 这时就难以根据某一局部表示定义 f 在点 $p \in U \cap V$ 的可微性. 为了避免在 $U \cap V$ 上可微性的定义出现歧义，应该要求两局部坐标之间的坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

和

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

都是连续可微的. 有了这样的条件，就可以由 $f \circ \varphi^{-1}$ 的可微性推论出

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

的可微性，反之亦然. 这就是说：两种局部坐标对于讨论函数 $f: S \to \boldsymbol{R}$ 的可微性是协调一致的或者说是**相容的**. 如果能找到一族局部坐标，其定义域覆盖了整个球面 S，并且两两在其定义域交叠的部分上是相容的，那么就可以无歧义地讨论函数 $f: S \to \boldsymbol{R}$ 在整个 S 上的可微性了. 这时可以说，在 S 上给出了一种微分结构. 微分流形定义的基本想法就是这样的.

微分流形

设 M 是一个拓扑空间，满足 Hausdorff 分离公理.（在本书以后的各章节中，还要求 M 满足第二可数公理，详见第二章的有关陈述.）

(U, φ) 称为是 M 的一个**局部坐标图卡**或者一个**图卡**(chart)，如果 U 是 M 的一个开集，φ 是从 U 到 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集

$\varphi(U)$的同胚映射.(U 称为图卡的定义域或**局部坐标域**.)

M 的两个图卡(U,φ)和(V,ψ)被称为是 **C^r 相容**的,如果有以下两种情形之一成立:

(1) 或者 $U\cap V=\varnothing$;

(2) 或者 $U\cap V\neq\varnothing$,并且坐标变换

$$\psi\circ\varphi^{-1}: \varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$$

和

$$\varphi\circ\psi^{-1}: \psi(U\cap V)\to\varphi(U\cap V)$$

都是 C^r 映射.

M 的一族图卡 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$ 被称为是一个 C^r **图汇**(atlas),如果

(1) $\mathscr{D}$ 中各图卡的定义域覆盖了 M;

(2) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都 C^r 相容.

M 的一个 C^r 图汇 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$被称为是**极大**的,如果它除了(1)和(2)而外还满足条件

(3) 与 $\mathscr{D}$ 中各图卡 C^r 相容的任何图卡(V,ψ)都属于 $\mathscr{D}$.

M 的一个极大 C^r 图汇,即满足上面要求(1),(2)和(3)的一族图卡,被称为是 M 上的一个 **C^r 结构**. M 连同一个给定的 C^r 结构被称为是一个 **C^r 流形**. $r\geqslant1$ 情形的 C^r 流形统称为**微分流形**. C^∞流形又称为**光滑流形**.

因为任何一个图汇都包含在一个确定的极大图汇之中,所以任何一个 C^r 图汇都确定一个惟一的 C^r 结构.

在上面的定义中,要求 M 的每一点都有一个邻域与 $\boldsymbol{R}^m$ 的某个开集同胚. 我们把这里的 m 称为是流形 M 的**维数**,记为

$$\dim M = m.$$

子流形

设 M 是 C^r 流形,$\dim M=m$; S 是 M 的一个子集. 如果对

任何 $p\in S$，存在 C^r 流形 M 的图卡 (U,φ)，使得 $p\in U$ 并且

(*) $$\varphi(U\cap S)=\varphi(U)\cap(\boldsymbol{R}^s\times 0),$$

那么我们就称 S 为 M 的 s 维(**正则**)**子流形**，并把适合条件(*)的图卡 (U,φ) 称为**关于子流形 S 正则的图卡**.

显然上面定义中的子流形 S 本身是一个 C^r 流形，其维数 $\dim S=s$.

乘积流形

设拓扑空间 M 和 N 各赋有 C^r 流形结构(不妨设 $\dim M=m$, $\dim N=n$). 我们可以赋予乘积拓扑空间 $M\times N$ 以乘积 C^r 流形结构. 首先，有了 M 的图卡 (U,φ) 和 N 的图卡 (V,ψ)，我们就可以构造乘积图卡 $(U\times V,\varphi\times\psi)$，其中的映射定义为

$$\varphi\times\psi:\ U\times V\to\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n,$$
$$(x,\ y)\mapsto(\varphi(x),\psi(x)).$$

显然 $(\varphi\times\psi)(U\times V)=\varphi(U)\times\psi(V)$ 是 $\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{m+n}$ 中的开集，并且

$$\varphi\times\psi:\ U\times V\to\varphi(U)\times\psi(V)$$

是同胚映射，其逆映射为 $(\varphi\times\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\times\psi^{-1}$.

如果 $(U_i,\varphi_i)(i=1,2)$ 是 M 的 C^r 相容图卡，$(V_i,\psi_i)(i=1,2)$ 是 N 的 C^r 相容图卡，那么 $(U_1\times V_1,\varphi_1\times\psi_1)$ 与 $(U_2\times V_2,\varphi_2\times\psi_2)$ 就是 $M\times N$ 的 C^r 相容图卡. 于是，有了 M 的 C^r 图汇和 N 的 C^r 图汇，就可以构造出 $M\times N$ 的 C^r 图汇，赋予乘积空间 $M\times N$ 以 C^r 流形结构. 这样定义的 C^r 流形 $M\times N$ 被称为是 M 与 N 的**乘积流形**.

带边流形

我们已经定义了以 m 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集为局部模

式的流形(无边流形). 这里将进一步定义以半空间

$$\boldsymbol{R}_{+}^{m}=\{(x^{1},x^{2},\cdots,x^{m})\in\boldsymbol{R}^{m}\mid x^{1}\geqslant 0\}$$

的开集为局部模式的流形——**带边流形**.

设 M 是一个拓扑空间,满足 Hausdorff 分离公理(在本书以后的各章节里还要求 M 满足第二可数公理,详见第二章的有关陈述).

(U,φ)被称为是 M 的一个**局部坐标图卡**或者一个**图卡**,如果 U 是 M 的一个开集,φ 是从 U 到 $\boldsymbol{R}_{+}^{m}$ 某个开集的同胚映射.

M 的两个图卡(U,φ)和(V,ψ)被称为是 **C^r 相容的**,如果有以下两种情形之一成立:

(1) 或者 $U\cap V=\varnothing$;

(2) 或者 $U\cap V\neq\varnothing$,并且坐标变换

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\rightarrow\psi(U\cap V)$$

和

$$\varphi\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap V)\rightarrow\varphi(U\cap V)$$

都是 C^r 映射.

M 的一族图卡 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$被称为是一个 C^r **图汇**,如果

(Ⅰ) $\mathscr{D}$ 中各图卡的定义域覆盖了 M;

(Ⅱ) $\mathscr{D}$ 中任意两个图卡都是 C^r 相容的.

M 的一个 C^r 图汇 $\mathscr{D}=\{(U,\varphi)\}$被称为是**极大的**,如果它除了(Ⅰ)和(Ⅱ)而外还满足条件

(Ⅲ) 与 $\mathscr{D}$ 中各图卡 C^r 相容的任何一个图卡(V,ψ)都属于 $\mathscr{D}$.

M 的一个极大 C^r 图汇,即满足上面条件(Ⅰ),(Ⅱ)和(Ⅲ)的一族图卡定义了 M 上的一个 **C^r 结构**. M 连同一个给定的 C^r 结构被称为是一个 **C^r 带边流形**. 显然无边流形可以看成是带边流形的特殊情形.

带边流形的**子流形**可仿照无边流形情形给出定义.

$p\in M$ 被称为是带边流形 M 的**边缘点**,倘若存在 M 的图卡(U,φ),使得 $p\in U$,并且

$$\varphi(p)\in\{(x^1,x^2,\cdots,x^m)\in \boldsymbol{R}_+^m \mid x^1=0\}.$$

M 的全体边缘点的集合被称为是 M 的**边缘**,记为 ∂M. 容易看出,如果 $\partial M\neq\varnothing$,那么边缘 ∂M 本身是一个维数为

$$\dim M-1=m-1$$

的无边流形.

注记 尚须对上面带边流形定义中的条件(2)作一些解释. 那里的 $\varphi(U\cap V)$是 $\boldsymbol{R}_+^m\subset\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 ($\varphi(U\cap V)$ 并不一定是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集). 映射

$$\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\boldsymbol{R}^m$$

的 r 阶连续可微性应该理解为:存在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 $G\supset\varphi(U\cap V)$,使得 $\psi\circ\varphi^{-1}$可适当地扩充定义到开集 G 上,并且扩充后的映射是从 G 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的 r 阶连续可微映射.

更一般地,设 H 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的子集(不一定是开集),考察映射 $f:H\to\boldsymbol{R}^n$. 如果存在 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集 $G\supset H$,使得 f 可扩充为定义于 G 的 C^r 映射,即存在 C^r 映射

$$F:G\to\boldsymbol{R}^n,$$

使得 $f=F|H$,那么就认为 f 在 H 上是 C^r 的.

带边的乘积流形

设 M 和 N 是 C^r 流形,其中 M 是带边流形,N 是无边流形(不妨设 $\dim M=m$, $\dim N=n$). 我们可以赋予乘积拓扑空间 $M\times N$ 乘积 C^r 流形结构. 与无边的情形类似,对于 M 的局部坐标图卡(U,φ)和 N 的局部坐标图卡(V,ψ),我们定义 $M\times N$ 的局部坐标图卡$(U\times V,\varphi\times\psi)$. 因为 $\varphi(U)$是 $\boldsymbol{R}_+^m$ 中的开集,$\psi(V)$

是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,所以

$$(\varphi \times \psi)(U \times V) = \varphi(U) \times \psi(V)$$

是 $\boldsymbol{R}_+^m \times \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}_+^{m+n}$ 中的开集. 如果 $(U_i, \varphi_i)(i=1,2)$ 是 M 的 C^r 相容图卡, $(V_i, \psi_i)(i=1,2)$ 是 N 的 C^r 相容图卡,那么

$$(U_1 \times V_1, \varphi_1 \times \psi_1) \text{ 与 } (U_2 \times V_2, \varphi_2 \times \psi_2)$$

就是 $M \times N$ 的 C^r 相容图卡. 于是,可由 M 的 C^r 图汇和 N 的 C^r 图汇构作 $M \times N$ 的 C^r 图汇,这样赋予 $M \times N$ 带边的 C^r 流形结构.

§4 可微映射

设 M 和 N 是 C^r 流形 $(r \geqslant 1)$,

$$f: M \to N$$

是连续映射, $p \in M$. 分别取 M 和 N 的图卡 (U, φ) 和 (V, ψ),使得

$$p \in U, \quad f(p) \in V.$$

必要时适当缩小 U,可设 $f(U) \subset V$. 考察映射

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V) \subset \boldsymbol{R}^n.$$

这个映射被称为 f 在 p 点邻近的**局部表示**.

局部表示 $\widetilde{f}$ 是从 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的映射,因而可以讨论其连续可微性. 如果 $\widetilde{f}$ 是 C^r 的,那么我们就说 **f 在 p 点邻近是 C^r 的**. 如果 f 在 M 上处处都是 C^r 的,则称 f 为 **C^r 映射**(C^0 映射即连续映射, C^∞ 映射又称为**光滑映射**).

请注意,虽然可微性的定义是借助于局部坐标加以陈述的,但这一性质本身并不依赖于局部坐标的具体选择.

如果 $f: M \to N$ 是一一对应,并且 f 和 f^{-1} 都是 C^r 映射,则称 f 为 **C^r 同胚**. $r \geqslant 1$ 情形的 C^r 同胚统称为**微分同胚**, C^∞ 同胚又称为**光滑同胚**.

设 M 和 N 是 C^r 流形，U 是 M 中的开集，$p\in U$. 如果映射

$$f: U \to N$$

是从 U 到开集 $f(U)\subset N$ 的 C^r 同胚，那么我们就说 f 是从 p 点邻近到 $f(p)$ 点邻近的**局部 C^r 同胚**.

设 M 和 N 是 C^r 流形（满足条件 $\dim M=m, \dim N=n, r\geqslant 1$），$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$p\in M$. 选择 M 和 N 的局部坐标图卡(U,φ)和(V,ψ)，满足条件：$p\in U, f(U)\subset V$. 作局部表示

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}: \varphi(U)\to\psi(V).$$

考察 $\tilde{f}$ 在 $\varphi(p)$ 点的微分（即 Jacobi 矩阵）的秩

$$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

如果另有 M 和 N 的局部坐标图卡(U_1,φ_1)和(V_1,ψ_1)也满足：

$$p\in U_1,\quad f(U_1)\subset V_1,$$

那么我们有另一局部表示

$$\tilde{f}_1=\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1}: \varphi_1(U)\to\psi_1(V).$$

容易证明

$$\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f}_1)_{\varphi_1(p)}=\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

因而 $\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}$ 实际上不依赖于局部坐标的选择，它反映了 f 在 p 点的性质，我们把它称为是 f 在 p 点的**秩**，记为 $\operatorname{rank}_p f$. 这就是说，我们定义

$$\operatorname{rank}_p f:=\operatorname{rank}(\mathrm{D}\tilde{f})_{\varphi(p)}.$$

下面考察关于秩的几种重要的情形.

(1) 如果 $m=n$, $\operatorname{rank}_p f=m=n$，那么 f 就是从 p 点邻近到 $q=f(p)$ 点邻近的局部 C^r 微分同胚.（这实质上就是逆函数定理.）

(2) 如果 $m\leqslant n$, $\operatorname{rank}_p f=m$，则称 f 在 p 点是**浸入**. 如果 f 在 M 的每一点都是浸入，则称 f 为**浸入映射**. 例如：从 $\boldsymbol{R}^m$ 到 $\boldsymbol{R}^n$

的标准放入映射

$$j:\ \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m} = \boldsymbol{R}^n,$$
$$(x^1,\cdots,x^m) \mapsto (x^1,\cdots,x^m,0,\cdots,0),$$

就是一个浸入映射.

(3) 如果 $m \geqslant n$, $\mathrm{rank}_p f = n$,则称 f 在 p 点是**淹没**. 如果 f 在 M 的每一点都是淹没,则称 f 为**淹没映射**. $m \geqslant n$ 时,从 $\boldsymbol{R}^m$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的标准投影映射

$$\pi:\ \boldsymbol{R}^m = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^{m-n} \to \boldsymbol{R}^n,$$
$$(x^1,\cdots,x^n,x^{n+1},\cdots,x^m) \mapsto (x^1,\cdots,x^n),$$

就是淹没映射的一个典型的例子.

我们可以选取适当的局部坐标图卡,使得浸入与淹没具有非常简单的局部表示.

命题 4.1(浸入的典范局部表示) 设 $f: M \to N$ 在 p 点是浸入. 则存在 p 点邻近的局部坐标图卡(U,φ)和 $q=f(p)$点邻近的局部坐标图卡(V,ψ),使得

$$f(U) \subset V,\quad \varphi(p) = 0,\quad \psi(q) = 0,$$
$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j|\varphi(U),$$

这里 j 是从 $\boldsymbol{R}^m$ 到 $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m} = \boldsymbol{R}^n$ 的标准放入映射,即

$$j: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m},$$
$$x \mapsto (x,0).$$

证明 首先选取 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡(U_1,φ)和 N 在 q 点邻近的局部坐标图卡(V_1,ψ_1),适合这样的条件:

$$f(U_1) \subset V_1,\quad \varphi(p) = 0,\quad \psi_1(q) = 0.$$

考察局部表示 $\tilde{f}_1 = \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$在 $\varphi(p)=0$ 点的微分. 不妨设

$$(\mathrm{D}\widetilde{f}_1)_0 = \begin{bmatrix} A_{m\times m} \\ \hdashline * \end{bmatrix}_{n\times m},$$

其中的 $A_{m\times m}$是非退化方阵：

$$\det A_{m\times m} \neq 0 .$$

考察映射

$$F : \varphi(U_1) \times \boldsymbol{R}^{n-m} \to \boldsymbol{R}^n$$

$$(x,y) \mapsto \widetilde{f}_1(x) + (0,y) .$$

因为

$$(\mathrm{D}F)_{(0,0)} = \left[\begin{array}{c:c} A_{m\times m} & 0 \\ \hdashline * & I_{(n-m)\times(n-m)} \end{array}\right],$$

所以 F 是从$(0,0)$点的某个开邻域 $H\subset\varphi(U_1)\times\boldsymbol{R}^{n-m}$到 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集 $G\subset\psi_1(V_1)$的微分同胚. 我们记

$$V=\psi_1^{-1}(G)\subset V_1,$$

$$U=U_1\cap f^{-1}(V)\subset U_1 ,$$

则有 $\psi_1(V)=G=F(H)$. 又因为

$$F\circ j(x) = F(x,0) = \widetilde{f}_1(x),$$

所以有如图 3 所示的交换图表.

取 $\psi=F^{-1}\circ\psi_1$, 则局部坐标图卡(U,φ)和(V,ψ)使得局部表示 $\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$具有如下性质：

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) &= \psi\circ f\circ\varphi^{-1}(x) \\ &= F^{-1}\circ\psi_1\circ f\circ\varphi^{-1}(x) \\ &= F^{-1}\circ\widetilde{f}_1(x) = j(x), \quad \forall x\in\varphi(U).\end{aligned}$$

这就是

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = j \big| \varphi(U). \qquad \square$$

图 3

命题 4.2（淹没的典范表示） 设 $f: M \to N$ 在点 $p \in M$ 是淹没，则存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 $q=f(p)$ 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ)，使得

$$f(U) \subset V, \quad \varphi(p) = 0, \quad \psi(q) = 0,$$
$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi \big| \varphi(U),$$

这里的 $\pi: \mathbf{R}^m = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m-n} \to \mathbf{R}^n$ 是标准的投影映射.

证明 首先选取 p 点邻近的局部坐标图卡 (U_1,φ_1) 和 q 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ)，适合这样一些条件：

$$f(U_1) \subset V, \quad \varphi_1(p) = 0, \quad \psi(q) = 0.$$

考察局部表示 $\widetilde{f}_1 = \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ 在 $\varphi_1(p) = 0$ 点的微分. 不妨设

$$(\mathrm{D}\widetilde{f}_1)_0 = \left[A_{n\times n} \;\vdots\; * \right],$$

其中 $A_{n\times n}$ 是非退化方阵. 考察映射 $F: \varphi_1(U_1) \to \mathbf{R}^m$，其分量表示为：

$$
\begin{cases}
F^1(x^1,\cdots,x^m) = (\tilde{f}_1)^1(x^1,\cdots,x^n,\ x^{n+1},\cdots,\ x^m), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
F^n(x^1,\cdots,x^m) = (\tilde{f}_1)^n(x^1,\cdots,x^n,\ x^{n+1},\cdots,\ x^m), \\
F^{n+1}(x^1,\cdots,x^n) = x^{n+1}, \\
F^{n+2}(x^1,\cdots,x^m) = x^{n+2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
F^m(x^1,\cdots,x^m) = x^m.
\end{cases}
$$

因为

$$
(\mathrm{D}F)_0 = \left[\begin{array}{c|c} A_{n\times m} & * \\ \hline 0 & I_{(m-n)\times(m-n)} \end{array}\right],
$$

所以存在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开子集 G，$0\in G\subset\varphi_1(U_1)$，使得 F 是从 G 到 $\boldsymbol{R}^m$ 中某个包含 0 点的开集 H 的微分同胚. 记 $U=\varphi_1^{-1}(G)\subset U_1$，$\varphi=F\circ\varphi_1$，则有如图 4 所示的交换图表. 局部坐标图卡 (U,φ) 和 (V,ψ) 使得 f 的局部表示具有以下形式

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} &= \psi\circ f\circ\varphi^{-1} = \psi\circ f\circ\varphi_1^{-1}\circ F^{-1} \\
&= \tilde{f}_1\circ F^{-1} = \pi\big|\varphi(U). \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
\varphi_1(U) & \xrightarrow{\tilde{f}_1} & \psi(V) \\
\downarrow{\scriptstyle F} & \nearrow{\scriptstyle\pi} & \\
H\subset\boldsymbol{R}^m & &
\end{array}
$$

$\varphi=F\circ\varphi_1$

图 4

§5 切空间与切映射

设 M 是一个微分流形，$p\in M$. 流形 M 上过 p 点的一条**可微曲线**是这样一个可微映射(这里的 ε 可以是任意给定的正实数)：

$$\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,$$

它满足条件 $\gamma(0)=p$. 所有的过 p 点的可微曲线的集合记为 $\mathscr{M}_p$；所有的在 p 点邻近有定义的连续可微实函数的集合记为 $\mathscr{F}_p$. 对于 $\gamma\in\mathscr{M}_p$ 和 $f\in\mathscr{F}_p$，我们引入记号：

$$(5.0)\qquad \langle f,\gamma\rangle_p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\circ\gamma(t)\Big|_{t=0}.$$

定义 5.1 在 $\mathscr{M}_p$ 上引入"**相切关系**"$\sim$，规定

$$\gamma_1\sim\gamma_2\Longleftrightarrow\langle f,\gamma_1\rangle_p=\langle f,\gamma_2\rangle_p,\quad\forall f\in\mathscr{F}_p.$$

容易验证：相切关系$\sim$是一种等价关系. 集合 $\mathscr{M}_p$ 按相切关系分类，每一等价类$[\gamma]$被称为是微分流形 M 在 p 点的一个**切向量**. 全体这样的切向量的集合

$$M_p=\mathscr{M}_p/\sim$$

被称为微分流形 M 在 p 点的**切空间**. 通常将微分流形 M 在 p 点的切空间记为 T_pM. (暂时我们还只能把切空间 $T_pM=M_p$ 看作一个集合. 稍后赋予它适当的线性结构之后，就可以把 $T_pM=M_p$ 看成一个线性空间.)

对于切向量$[\gamma]\in M_p$，可以定义

$$(5.1)\qquad \langle f,[\gamma]\rangle:=\langle f,\gamma\rangle_p.$$

我们可以把(5.0)式和(5.1)式解释为函数 f 沿切向量$[\gamma]$的方向导数. 这样对切向量可以有更进一步的认识. 众多教科书和文献采用算子形式定义切向量，实际上就是方向导数概念的抽象化.

取微分流形 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ)，考察其坐标分量函数

$$x^j = \pi^j \circ \varphi, \quad j = 1,\cdots,m,$$

这里的 $\pi^j: \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ 是到第 j 个因子空间的投影. 因为

$$\begin{aligned}
\langle f,\gamma \rangle_p &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \gamma(t) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0} \\
&= \sum_j \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^j \circ \gamma(t) \Big|_{t=0} \\
&= \sum_j \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right)_{\varphi(p)} \langle x^j,\gamma \rangle_p,
\end{aligned}$$

所以，为了判断 $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathscr{M}_p$ 是否相切，只须用 p 点邻近任意一个局部坐标图卡 (U,φ) 的坐标分量 $x^1,\cdots,x^m$ 作为检验函数，检验是否有

$$\langle x^j,\gamma_1 \rangle_p = \langle x^j,\gamma_2 \rangle_p, \quad j = 1,\cdots,m.$$

定义 5.2 设 $[\gamma]$ 是微分流形 M 在 p 点的一个切向量；(U,φ) 是 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡，$x^1,\cdots,x^m$ 是 φ 的坐标分量函数. 我们把

$$\xi^j = \langle x^j,[\gamma] \rangle, \quad j = 1,\cdots,m$$

称为切向量 $[\gamma] \in M_p$ 的**坐标分量**.

选定了 M 在 p 点邻近的一个局部坐标图卡 (U,φ) 之后，用上面所说的方式，可使每个切向量 $[\gamma]$ 惟一地对应着一个 m 维向量

$$\xi = (\xi^1,\cdots,\xi^m) \in \boldsymbol{R}^m.$$

反过来，对于每一个 m 维向量

$$\xi = (\xi^1,\cdots,\xi^m) \in \boldsymbol{R}^m,$$

也恰有一个切向量$[\gamma]\in M_p$，其坐标分量是$\xi^1,\cdots,\xi^m$. 该切向量可以由过p点的这样一条曲线γ所给出（选取足够小的$\varepsilon>0$）：

$$\gamma(t)=\varphi^{-1}(\varphi(p)+t\xi),\quad t\in(-\varepsilon,\varepsilon).$$

这样，每当选定了M在p点邻近的一个局部坐标图卡(U,φ)之后，就能按上述方式建立起切空间M_p与$\boldsymbol{R}^m$之间的一一对应：

$$\varphi_*:M_p\to\boldsymbol{R}^m,$$

$$[\gamma]\mapsto\xi;$$

$$\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^m),\quad \xi^j=\langle x^j,[\gamma]\rangle,\quad j=1,\cdots,m.$$

设(V,ψ)是M在p点邻近的另一局部坐标图卡，其坐标分量函数为

$$y^j=\pi^j\circ\psi,\quad j=1,\cdots,m.$$

设切向量$[\gamma]\in M_p$相应于(V,ψ)的坐标分量为$\eta^1,\cdots,\eta^m$. 因为

$$\psi\circ\gamma(t)=(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\gamma(t)),$$

所以切向量$[\gamma]$的新旧坐标分量之间按照以下法则变换：

$$\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\cdot\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t},$$

也就是

(5.2) $$\eta^j=\sum\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\xi^k.$$

变换(5.2)中的系数方阵

$$\left[\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right]_{m\times m}$$

即是映射$\psi\circ\varphi^{-1}$的Jacobi方阵. 我们把这方阵所表示的线性变换（即映射$\psi\circ\varphi^{-1}$的微分）记为$(\psi\circ\varphi^{-1})_*$. 于是，(5.2)式可以写成（参看图5）

(5.3) $$\psi_*=(\psi\circ\varphi^{-1})_*\circ\varphi_*.$$

由此又得到

(5.4) $$\psi_*^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})_* = \varphi_*^{-1}.$$

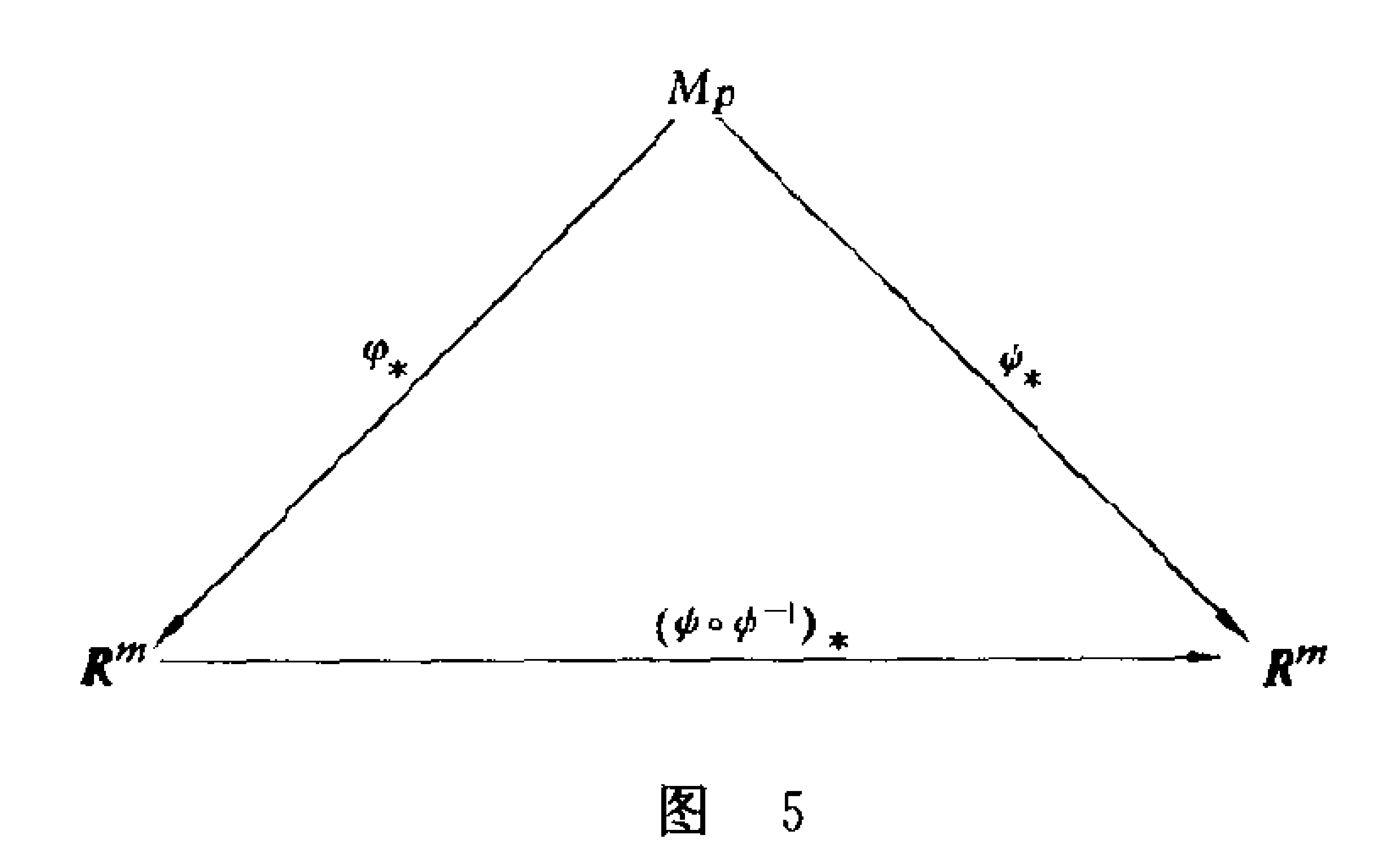


图 5

选定了 M 在 p 点邻近的一个局部坐标(U,φ)之后，借助于一一对应

$$\varphi_*: M_p \to \boldsymbol{R}^m,$$
$$[\gamma] \mapsto \xi,$$

我们可以将 $\boldsymbol{R}^m$ 中的线性结构移植到 M_p 之上. 这就是说，我们可以定义

$$[\beta]+[\gamma] := \varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])),$$
$$c[\gamma] := \varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

如果换用 M 在 p 点邻近的另一局部坐标(V,ψ)，那么利用(5.3)和(5.4)式可得

$$\begin{aligned}&\psi_*^{-1}(\psi_*([\beta])+\psi_*([\gamma]))\\&=\psi_*^{-1}((\psi\circ\varphi^{-1})_*(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])))\\&=(\psi_*^{-1}\circ(\psi\circ\varphi^{-1})_*)(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma]))\\&=\varphi_*^{-1}(\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma])).\end{aligned}$$

类似地可以得到

$$\psi_*^{-1}(c\psi_*([\gamma])) = \varphi_*^{-1}(c\varphi_*([\gamma])).$$

这就是说，我们用上面所说的方式定义的 M_p 中的线性运算，实际上与局部坐标的具体选择无关.

用上述方式定义了线性结构之后，切空间 $T_pM=M_p$ 成为线性空间，并且映射

$$\varphi_* : T_pM \to \boldsymbol{R}^m$$

是线性空间之间的同构：

$$\varphi_*([\beta]+[\gamma])=\varphi_*([\beta])+\varphi_*([\gamma]),$$
$$\varphi_*(c[\gamma])=c\,\varphi_*([\gamma]).$$

考察 $\boldsymbol{R}^m$ 中的标准基底

(5.5) $$\delta_j=(\delta_j^1,\delta_j^2,\cdots,\delta_j^m),\quad j=1,\cdots,m,$$

其中

$$\delta_j^i=\begin{cases}1, & 若\ i=j,\\ 0, & 若\ i\neq j.\end{cases}$$

同构

$$\varphi_*^{-1} : \boldsymbol{R}^m \to T_pM$$

将 $\boldsymbol{R}^m$ 的基底(5.5)变成 T_pM 的一组基底，我们将这组基底记为

$$\frac{\partial}{\partial x^1},\ \frac{\partial}{\partial x^2},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

换句话说，我们约定记

(5.6) $$\frac{\partial}{\partial x^k}=\varphi_*^{-1}(\delta_k),\quad k=1,2,\cdots,m.$$

切向量 $[\gamma]\in T_pM$ 经同构 φ_* 映成 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个向量 ξ，其分量为

$$\xi^j=\langle x^j,[\gamma]\rangle,\quad j=1,2,\cdots,m.$$

于是有

$$\varphi_*([\gamma])=\sum_k\xi^k\delta_k,\quad [\gamma]=\varphi_*^{-1}\Big(\sum_k\xi^k\delta_k\Big)=\sum_k\xi^k\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

命题 5.3 选定了 M 在 p 点邻近的局部坐标之后，

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}$$

成为切空间 T_pM 的一组基底. 切向量$[\gamma] \in T_pM$ 对这组基底展开的系数恰好为

$$\xi^k = \langle x^k, [\gamma] \rangle, \quad k = 1, 2, \cdots, m.$$

定义 5.4 设 M 和 N 是微分流形，$F: M \to N$ 是可微映射，$p \in M$. 映射 F 诱导出这样一个从 $T_pM = M_p$ 到 $T_{F(p)}N = N_{F(p)}$ 的映射：

$$\begin{aligned} F_* : M_p &\to N_{F(p)} \\ [\gamma] &\mapsto [F \circ \gamma]. \end{aligned}$$

这诱导映射 F_* 被称为是映射 F 在 p 点的**切映射**.

任意选取 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡(U, φ)和 N 在 $F(p)$点邻近的局部坐标图卡(V, ψ)，记

$$\widetilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}.$$

对于$[\gamma] \in M_p$，设

$$[\gamma] = \sum_{k=1}^m \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad F_*([\gamma]) = [F \circ \gamma] = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

则有

$$\begin{aligned} \eta^j &= \langle y^j, [F \circ \gamma] \rangle \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y^j \circ F \circ \gamma(t) \bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \widetilde{F}^j}{\partial x^k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (x^k \circ \gamma(t)) \bigg|_{t=0} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \widetilde{F}^j}{\partial x^k} \langle x^k, [\gamma] \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \widetilde{F}^j}{\partial x^k} \xi^k. \end{aligned}$$

命题 5.5 切映射 $F_* : M_p \to N_{F(p)}$ 是一个线性映射，它的分量表示 $\widetilde{F}_*$ 是由 Jacobi 矩阵

$$\left[\frac{\partial \widetilde{F}^j}{\partial x^k}\right]_{n\times m}$$

所决定的线性映射.

附录 α 函数芽的概念与余切空间

设 M 是 C^r 流形. 对于任意一点 $p\in M$，我们来考察在 p 点邻近有定义的 C^r 函数. 设 U 和 V 都是 p 点的开邻域，$f: U\to \boldsymbol{R}$ 和 $g: U\to \boldsymbol{R}$ 都是 C^r 函数. 这两个函数之和 $f+g$ 只在 $U\cap V$ 上有定义. 对于在 p 点邻近局部有定义的 C^r 函数组成的集合 $\mathscr{F}_p$，若按上述办法定义加法，希望建立线性空间的结构，就会遇到技术性困难(0 元素的定义域无法确定). 因为我们关心的是函数在 p 点邻近的局部性质，所以不妨借助于下面将介绍的等价关系克服所遇到的困难.

设 U_1 和 U_2 都是 p 点的开邻域，f_1 和 f_2 分别是定义于 U_1 和 U_2 上的 C^r 函数. 如果存在 p 点的开邻域

$$W\subset U_1\cap U_2,$$

使得

$$f_1|W = f_2|W,$$

那么就称 f_1 与 f_2 在 p 点邻近相等，记为

$$f_1 \underset{(p)}{=} f_2.$$

这样定义的“$\underset{(p)}{=}$”是一个等价关系. 约定将该等价关系的任何一个等价类称为是 M 上 p 点处的一个 C^r **函数芽(germ)**. 约定将所有这样的 C^r 函数芽组成的集合记为 $\mathscr{F}_p^0$.

为了书写简单，对于定义于 p 点邻近的任何一个 C^r 函数 f，

通常就用记号 f 本身表示其所属的 C^r 函数芽. 通常函数之间的加法，数乘和乘法运算都可以毫无困难地移来作为函数芽之间的运算. 很容易用这样的运算为 $\mathscr{F}_p^0$ 建立线性空间结构. 该空间的 0 元素就是由在 p 点邻近等于 0 的函数所决定的函数芽.

类似地，对于 M 上过 p 点的 C^r 曲线，也可定义过 p 点的 C^r 曲线芽. 有了芽的概念，可以对 §5 的(5.0)式作新的解释. 在下面的式子中，可以认为 f 就是它所代表的 M 上 p 点处的函数芽，γ 就是它所代表的 M 上过 p 点的 C^r 曲线芽.

$$(\alpha.1)\qquad \langle f,\gamma\rangle_p := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma(t))\Big|_{t=0}.$$

借助于这样理解的(α.1)式，我们在 $\mathscr{F}_p^0$ 上进一步引入相切关系"～". 考察 $f_1,f_2\in\mathscr{F}_p^0$. 如果对 M 上过 p 点的任何曲线芽都有

$$\langle f_1,\gamma\rangle_p = \langle f_2,\gamma\rangle_p,$$

那么就认为 f_1 与 f_2 在 p 点相切，记为 $f_1\sim f_2$.

容易验证，这样定义的 C^r 函数芽($r\geqslant1$)之间的相切关系"～"是一种等价关系. 约定将每一个等价类$[f]$称为是微分流形 M 在 p 点的一个**余切向量**(通常将这样的等价类$[f]$记为 $\mathrm{d}f$)，全体这样的余切向量组成的集合称为是微分流形 M 在 p 点的**余切空间**，约定将其记为 $\mathscr{F}_p^*$. 于是

$$(\alpha.2)\qquad \mathscr{F}_p^* := \mathscr{F}_p^0/\sim.$$

对于 $f,\ g,\ f_1,\ g_1\in\mathscr{F}_p^0,\ \alpha\in\boldsymbol{R}$，如果

$$f\sim f_1,\quad g\sim g_1,$$

那么显然有

$$f+g\sim f_1+g_1,$$
$$\alpha f\sim\alpha f_1.$$

据此，可以将 $\mathscr{F}_p^0$ 上已建立的线性结构移来作为 $\mathscr{F}_p^*$ 上的线性结构，使之成为线性空间. 可以证明，余切空间 $\mathscr{F}_p^*$ 是切空间

T_pM 的对偶线性空间 $\Big($给定了 p 点邻近的局部坐标，借助于 (α.1) 可以证明 $\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^m$ 是$\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ 的对偶基底$\Big)$. 通常人们将微分流形 M 在 p 点的余切空间 $\mathscr{F}^*_p$ 记为 T^*_pM.

练 习 A

A.1. 以下这些集合视为 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间赋有相应的拓扑. 试问能否赋予这些拓扑空间以微分结构而使它们成为微分流形?

(1) $A=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid xy=0\}$;

(2) $B=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid |x|+|y|=1\}$;

(3) $C=\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x>0,\ y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$;

(4) $D=C\cup\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2 \mid x=0,|y|<1\}$.

A.2. 设 M 是紧致微分流形，N 是连通微分流形，$f: M\to N$是一个淹没映射. 试证 $f(M)=N$.

A.3. 对于紧致微分流形 M,不存在从 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的淹没映射.

A.4. 设 M 是紧致微分流形，$f: M\to\boldsymbol{R}$ 是可微映射. 试证：至少存在 M 上的两个点 p 和 q,使得$(f_*)_p$ 和$(f_*)_q$ 都是零映射.

A.5. 循以下线索可以作出代数基本定理的又一个“拓扑”证明.

(1) 设 $m\geqslant 1$,$g(z)$是 m 次复系数多项式. 试证：如果 $g(z)$ 有根，那么它至多只有 m 个根.(请注意：证明这一结论只用带余除法，勿须引用代数基本定理.)

(2) 设 $n\geqslant 1$,$f(z)$是 n 次复系数多项式，则

$$K=\{z\in\boldsymbol{C} \mid f'(z)=0\}$$

是有限集合.

(3) $A=f(\boldsymbol{C}\backslash K)$和$B=\boldsymbol{C}\backslash f(\boldsymbol{C})$都是复平面$\boldsymbol{C}$上的开集，并且$A\cap B=\varnothing$.

(4) 记$E=\boldsymbol{C}\backslash f(K)$，则$E\subset A\cup B$. 因为$E$是连通集合，所以必有以下两个论断之一成立：

$$或者\ E\cap A=\varnothing,或者\ E\cap B=\varnothing.$$

(5) 试证$E\cap A\neq\varnothing$，因而只能有$E\cap B=\varnothing$. 又因为$B\subset E$，所以$B=B\cap E=\varnothing$. 由此得知$f(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}$.

A. 6. 在 Milnor 所著的深受珍爱的小书《从微分观点看拓扑》的 § 1 里，给出了代数基本定理的另一种“拓扑”证明. 请阅读该证明并弄清所有的细节.

A. 7. 把所有的$n\times m$实数矩阵组成的集合记为$M(n,m)$. 我们可以将$M(n,m)$等同于$\boldsymbol{R}^{nm}$，从而赋予它与$\boldsymbol{R}^{nm}$相同的拓扑结构，又设$M(n,m;k)$是由全体秩为k的$n\times m$实数矩阵组成的$M(n,m)$的子集合. 试证$M(n,m;k)$是$M(n,m)$的正则子流形，并请计算$M(n,m;k)$的维数.

A. 8. 试借助逆函数定理的结论证明一般的多变元方程组的隐函数定理.

第二章　第二可数性质，仿紧性质与单位分解

§1　第二可数性质

拓扑基　设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的一族开集. 如果 X 的任何一个开集 G 都可以表示成 $\mathscr{B}$ 中某些开集的并集，即

$$G=\bigcup_{\substack{B\subset G\\ B\in\mathscr{B}}}B,$$

那么我们就说 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个**拓扑基**.

引理 1.1　设 X 是一个集合，G 是 X 的一个子集，$\mathscr{B}$ 是 X 的一族子集，则以下两个条件相互等价：

(1) 集合 G 可以表示成 $\mathscr{B}$ 中某些集合之并集；

(2) 对任何 $x\in G$，存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$.

证明　(1)$\Longrightarrow$(2)　对任何

$$x\in G=\bigcup_{\substack{B\subset G\\ B\in\mathscr{B}}}B,$$

显然存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$.

(2)$\Longrightarrow$(1)　设对任何 $x\in G$，存在 $B_x\in\mathscr{B}$，使得 $x\in B_x\subset G$，则显然有

$$G\subset\bigcup_{x\in G}B_x\subset G,$$

因而有

$$G=\bigcup_{x\in G}B_x.\qquad\square$$

覆盖的细分关系（从属关系）　设 X 是一个集合，$\mathscr{V}$ 和 $\mathscr{W}$ 是 X 的覆盖. 若对任何一个 $V\in\mathscr{V}$ 存在 $W\in\mathscr{W}$，使得

$$V\subset W,$$

则称 $\mathscr{V}$ **细分** $\mathscr{W}$，又称 $\mathscr{V}$ **从属**于 $\mathscr{W}$，记为

$$\mathscr{V} \prec \mathscr{W}.$$

拓扑空间 X 的任何一个拓扑基 $\mathscr{B}$ 当然都是 X 的一个开覆盖.下面的命题则更值得我们注意.

命题 1.2 设 X 是一个拓扑空间,$\mathscr{B}$ 是 X 的一个拓扑基,则对 X 的任何一个开覆盖 $\mathscr{W}$,存在 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \subset \mathscr{B}$,使得

(1) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 仍是 X 的拓扑基(自然也是覆盖);

(2) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \prec \mathscr{W}$.

证明 我们定义

$$\mathscr{B}_{\mathscr{W}} = \{B \in \mathscr{B} \mid \exists W \in \mathscr{W} : B \subset W\}.$$

下面验证这样的 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 满足要求(1)和(2).根据定义,(2)显然成立.为了验证(1),我们考察 X 的任意一个开集 G.对任何 $x \in G$,显然存在 $W \in \mathscr{W}$,使得 $x \in G \cap W$;因而又存在 $B \in \mathscr{B}$,使得 $x \in B \subset G \cap W$.显然有

$$B \in \mathscr{B}_{\mathscr{W}}, \quad x \in B \subset G.$$

这证明了 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 仍是 X 的拓扑基. □

第二可数空间 拓扑空间 X 被称为**第二可数空间**,倘若它满足下面的**第二可数公理**:

(A_2) X 具有由可数个开集组成的拓扑基.(请注意,这里和以后所说的“可数”均包括“有限”的情形,更精确的说法是“至多可数”.)

定理 1.3(Lindelöf 定理) 第二可数空间 X 的任何一个开覆盖都含有可数子覆盖.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个可数的拓扑基,$\mathscr{W}$ 是 X 的一个开覆盖.根据命题 1.2,存在 $\mathscr{B}$ 的子族 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$,使得

(1) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 覆盖 X;

(2) $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \prec \mathscr{W}$.

$\mathscr{B}_{\mathscr{W}}$ 作为 $\mathscr{B}$ 的子族自然仍是可数的.不妨设

$$\mathscr{B}_{\mathscr{W}} = \{B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots\}.$$

由于 $\mathscr{B}_{\mathscr{W}} \prec \mathscr{W}$，对每一个 $B_k \in \mathscr{B}_{\mathscr{W}}$，存在 $W_k \in \mathscr{W}$，使得 $B_k \subset W_k$. 于是 $\mathscr{W}$ 的可数子族

$$\mathscr{W}_0 = \{W_1, W_2, \cdots, W_k, \cdots\}$$

仍是 X 的一个覆盖. □

定理 1.4 流形 M 为第二可数空间的必要充分条件是：它具有由可数个局部坐标域构成的覆盖.

证明 "必要性"部分可引用定理 1.3 加以证明，下面证明"充分性"部分.

充分性. 每一局部坐标域 U 同胚于 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$，因而是第二可数的. 只须证明：假如 M 能表示成可数个开集的并集

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

其中每个开集 U_k 都是第二可数的，那么 M 本身是第二可数空间. 请读者自己验证这后一结论. □

在流形的定义中附加第二可数公理，可以有效地排除一些"病态"情形的烦扰，使我们的注意力能够集中于最重要、最有意义的情形. 因此，我们作如下的约定.

重要约定 若无另外的说明，以后行文中所提到的流形都认为是满足第二可数公理的.

§2 局部紧性质

局部紧空间 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间. X 被称为是**局部紧**的，倘若对 X 的任意一点 p 和包含该点的任意开集 U，存在这样的开集 V：V 的闭包 $\overline{V}$ 是紧致的，并且满足条件

$$p \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

换句话说，X 被称为是局部紧的，倘若对任意的 $p \in X$ 和 p 点的任意开邻域 U，存在 p 点的闭包为紧致集的开邻域 V，使得

$$\overline{V} \subset U.$$

定理 2.1 流形是局部紧空间. □

定理 2.2 设 X 是第二可数的、局部紧 Hausdorff 拓扑空间，则存在可数个开集 $G_1, G_2, \cdots, G_k, \cdots$，满足以下条件：

(1) $\overline{G}_j$ 是紧致集，$j=1,2,\cdots$；

(2) $\overline{G}_j \subset G_{j+1}$，$j=1,2,\cdots$；

(3) $\bigcup_j G_j = \bigcup_j \overline{G}_j = X$.

证明 闭包紧致的开集组成 X 的一个覆盖，因而存在可数子覆盖. 设

(*) $$W_1, W_2, \cdots, W_k, \cdots$$

是可数个闭包为紧致集的开集，它们覆盖了 X. 我们首先取 $G_1 = W_1$. 假定 G_{k-1} 已经选定，满足这样的条件：

(I_{k-1}) $\overline{G}_{k-1}$ 是紧致集；

(II_{k-1}) $W_{k-1} \subset G_{k-1}$.

我们从(*)中选取有限个开集，使得这些开集的并集 V_{k-1} 覆盖 $\overline{G}_{k-1}$. 然后命 $G_k = V_{k-1} \cup W_k$. 显然 G_k 满足条件

(I_k) $\overline{G}_k$ 是紧致集；

(II_k) $\overline{G}_{k-1} \cup W_k \subset G_k$.

用这样的方式选取的可数个开集

$$G_1, G_2, \cdots, G_k, \cdots,$$

满足条件：

(1) $\overline{G}_k$ 是紧致集，$k=1,2,\cdots$；

(2) $\overline{G}_{k-1}\subset G_k$，$k=2,3,\cdots$；

(3) $X\subset \bigcup_k W_k\subset \bigcup_k G_k\subset \bigcup_k \overline{G}_k\subset X$. □

注记 2.3 如果拓扑空间 X 可以表示成可数个紧致集的并集，那么我们就说 X 是 σ 紧的. 根据定理 2.2，任何(满足第二可数公理的)流形都是 σ 紧的.

§3 仿紧性质

局部有限性与仿紧性 (1) 设 X 是一个拓扑空间. 我们说 X 的一个子集族 $\mathscr{W}$ 是**局部有限**的，倘若对任何 $p\in X$，存在 p 点之开邻域 U，使得 U 只与 $\mathscr{W}$ 中的有限个集合 W 相交(即：仅有限个 $W\in\mathscr{W}$ 能使 $U\cap W\neq\varnothing$).

(2) 设 X 是拓扑空间，满足 Hausdorff 分离公理. 空间 X 被称为是**仿紧**的，倘若对于 X 的任何开覆盖 $\mathscr{V}$，都存在 X 的局部有限的开覆盖 $\mathscr{W}$，使得 $\mathscr{W}\prec\mathscr{V}$.

容易证明：X 的任何紧致集 K 仅与局部有限族 $\mathscr{W}$ 的有限个集合相交. 这就是说，仅有有限个 $W\in\mathscr{W}$ 能使 $K\cap W\neq\varnothing$.

记号约定 我们约定以 B_ρ 表示 $\boldsymbol{R}^m$ 中以原点为中心，以 ρ 为半径的开球. 这就是说，约定记

$$B_\rho := \{x=(x_1,\cdots,x_m)\in\boldsymbol{R}^m \mid x_1^2+\cdots+x_m^2<\rho^2\}.$$

定理 3.1 设 M 是一个(满足第二可数公理的)流形. 则对于 M 的任何一个开覆盖 $\mathscr{Q}$，存在 M 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i，W_i，使得

$$W_i\subset V_i\subset U_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

并且满足条件：

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$是局部有限族，$\mathscr{U}<\mathscr{Q}$；

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3$，$\varphi_i(V_i)=B_2$，$\varphi_i(W_i)=B_1$，$i=1,2,\cdots$；

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$覆盖 M.

证明 取可数个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_h,\cdots$满足定理 2.2 的要求. 记 $G_{-1}=G_0=\varnothing$. 显然 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$是紧致集，$G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2}$是开集，并且

$$\overline{G}_h\backslash G_{h-1}\subset G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2}.$$

对任意的 $p\in\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$，存在 $Q\in\mathscr{Q}$，使得 $p\in Q$. 因而存在 M 的局部坐标图卡(U,φ)，满足这样的条件：

(i) $p\in U\subset(G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2})\cap Q$；

(ii) $\varphi(p)=0$，$\varphi(U)=B_3$.

我们记

$$V=\varphi^{-1}(B_2),\quad W=\varphi^{-1}(B_3).$$

因为 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$是紧致集，所以存在有限个点 $p_{(h,1)},p_{(h,2)},\cdots,p_{(h,k_h)}$，使得相应的 $W_{(h,1)},W_{(h,2)},\cdots,W_{(h,k_h)}$覆盖 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$. 只须取

$$\mathscr{U}=\{U_{(1,1)},\cdots,U_{(1,k_1)};U_{(2,1)},\cdots,U_{(2,k_2)};\cdots\},$$

$$\mathscr{V}=\{V_{(1,1)},\cdots,V_{(1,k_1)};V_{(2,1)},\cdots,V_{(2,k_2)};\cdots\},$$

$$\mathscr{W}=\{W_{(1,1)},\cdots,W_{(1,k_1)};W_{(2,1)},\cdots,W_{(2,k_2)};\cdots\},$$

就可满足条件：

(1) $\mathscr{U}$ 是局部有限族，$\mathscr{U}<\mathscr{Q}$；

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3$，$\varphi_i(V_i)=B_2$，$\varphi_i(W_i)=B_1$，$i=1,2,\cdots$；

(3) $\mathscr{W}$ 覆盖 M.

以上这些条件中，只有 $\mathscr{U}$ 的局部有限性质尚须验证. 为了验证局部有限性，我们考察 M 的任意一点 p. 可设 $p\in G_r$. 容易看出：p 点的开邻域 G_r 仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个集合相交，

$$G_r\cap U_{(i,j)}=\varnothing,\quad \forall i\geqslant r+2,1\leqslant j\leqslant k_i. \qquad \square$$

推论 3.2（满足第二可数公理的） 流形是仿紧的.

这里的定理 3.1 及推论 3.2 将在后面许多重要定理的证明中用到. 采取类似的办法，还可以证明更一般的结论.

定理 3.3 局部紧第二可数的 Hausdorff 拓扑空间 X 必定是仿紧空间.

证明 取可数个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_h,G_{h+1},\cdots$满足定理 2.2 所述的条件(1)，(2)和(3). 考察 X 的任何一个开覆盖 $\mathscr{Q}$. 对每个$x\in\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$都存在某个 $Q_x\in\mathscr{Q}$，使得 $x\in Q_x$. 我们记

$$W_x=Q_x\cap(G_{h+1}\backslash\overline{G}_{h-2}). \tag{3.1}$$

因为 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$是紧致集，所以存在有限个点

$$x_{(h,1)},\ x_{(h,2)},\ \cdots,\ x_{(h,k_h)},$$

使得相应的如(3.1)那样的开集

$$W_{(h,1)},\ W_{(h,2)},\ \cdots,\ W_{(h,k_h)}$$

覆盖了 $\overline{G}_h\backslash G_{h-1}$. 我们记

$$\mathscr{W}=\{W_{(1,1)},\cdots,W_{(1,k_1)};\ W_{(2,1)},\cdots,W_{(2,k_2)};\ \cdots\},$$

则 $\mathscr{W}$ 是覆盖了 X 的局部有限开集族，并且

$$\mathscr{W}\prec\mathscr{Q}. \qquad \square$$

§4 单位分解

引理 4.1 设 ζ 是这样定义的实函数：

$$\zeta(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}, & 对于\ t>0,\\ 0, & 对于\ t\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $\zeta\in C^{\infty}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$.

证明 运用 L'Hospital 法则很容易证明对任何多项式 $P(x)$ 都有

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}P(x)=0,$$

因而

$$\lim_{t\to 0+} e^{-\frac{1}{t}}P\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

为了证明 $\zeta\in C^{\infty}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$，须验证：对任何非负整数 n，函数 $\zeta(t)$ 在 $t>0$ 范围和 $t\leqslant 0$ 范围分别求出的 n 阶导数都能在 $t=0$ 处连续地衔接起来. 通过归纳，很容易证明 ζ 的 n 阶导数 $\zeta^{(n)}$ 可以表示为

$$\zeta^{(n)}(t)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{t}}P_n\left(\frac{1}{t}\right), & 对于\ t>0,\\ 0, & 对于\ t\leqslant 0.\end{cases}$$

这里

$$P_0\left(\frac{1}{t}\right)=1,$$

$$P_{n+1}\left(\frac{1}{t}\right)=\left(P_n\left(\frac{1}{t}\right)-P_n'\left(\frac{1}{t}\right)\right)\frac{1}{t^2}.$$

因而 P_n 是一个 $2n$ 次的多项式. 据此可知

$$\lim_{t\to 0+} e^{-\frac{1}{t}}P_n\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

综上所述，我们证明了 $\zeta\in C^{\infty}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$. □

引理 4.2 设 η 是这样定义的函数：

$$\eta(x)=\frac{\zeta(4-r^2)}{\zeta(4-r^2)+\zeta(r^2-1)},$$

其中 ζ 是引理 4.1 中的那个函数，

$$x=(x_1,\cdots,x_m)\in \boldsymbol{R}^m,\quad r=\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_m^2}.$$

则 $\eta\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{R})$，并且满足以下条件：

$$\begin{cases}\eta(x)=1, & \text{对于}\|x\|=r\leqslant 1,\\ 0<\eta(x)<1, & \text{对于} 1<r<2,\\ \eta(x)=0, & \text{对于}\|x\|=r\geqslant 2,\\ \eta(-x)=\eta(x), & \text{对于任意的} x\in\boldsymbol{R}^m.\end{cases}$$

引理 4.3 设 M 是光滑流形，p 是 M 的任意一点，(U,φ) 是 M 的局部坐标图卡，V 和 W 是 M 中的开集，并设

$$p\in W\subset\overline{W}\subset V\subset\overline{V}\subset U,$$

$$\varphi(p)=0,\quad \varphi(W)=B_1,\quad \varphi(V)=B_2,\quad \varphi(U)=B_3,$$

则存在 $\eta\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$，满足条件：

$$\begin{cases}\eta(q)=1, & \text{对于} q\in\overline{W},\\ 0<\eta(q)<1, & \text{对于} q\in V\backslash\overline{W},\\ \eta(q)=0, & \text{对于} q\in M\backslash V.\end{cases}$$

记号约定 设 $f:M\to\boldsymbol{R}$ 是 C^k 函数（$k\geqslant 0$），我们约定记

$$\operatorname{supp}f=\overline{\{q\in M\mid f(q)\neq 0\}},$$

并把它称为函数 f 的**支集**. 若 $\operatorname{supp}f$ 是紧致的. 则称 f 为**紧支函数**. 定义于 M 上的全体紧支 C^k 函数的集合记为 $C_c^k(M,\boldsymbol{R})$. 特别地，全体紧支光滑函数的集合记为 $C_c^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$.

定理 4.4（单位分解或 1 的分解(Partition of unity)) 设 M 是光滑流形，$\mathscr{Q}$ 是 M 的任意一个开覆盖，则存在可数个

$$\lambda_i\in C_c^{\infty}(M,\boldsymbol{R}),\quad i=1,2,\cdots,$$

适合条件：

(1) $\{\operatorname{supp}\lambda_i\}<\mathscr{Q}$;

(2) $\{\text{supp}\lambda_i\}$是局部有限族；

(3) $\lambda_i \geqslant 0$, $i=1,2,\cdots$, 并且 $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \equiv 1$.

证明 取(U_i,φ_i), V_i 和 $W_i(i=1,2,\cdots)$如定理 3.1 中所述. 然后取 $\eta_i \in C_c^\infty(M,\boldsymbol{R})(i=1,2,\cdots)$，适合这样的条件：

$$\begin{cases} \eta_i(q) = 1, & \forall q \in \overline{W}_i, \\ 0 < \eta_i(q) < 1, & \forall q \in V_i \backslash \overline{W}_i, \quad i = 1,2,\cdots. \\ \eta_i(q) = 0 & \forall q \in M \backslash V_i, \end{cases}$$

因为 $\mathscr{U} = \{U_i\}$是局部有限族，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_i < +\infty.$$

又因为 $\mathscr{W} = \{W_i\}$覆盖了 M，所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \geqslant 1.$$

我们定义

$$\lambda_i = \eta_i \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j, \quad i = 1,2,\cdots.$$

很容易验证：这样定义的 $\lambda_i,\lambda_2,\cdots$，满足定理的全部要求. □

注记 4.5 通常把满足上面定理的要求(1)～(3)的紧支光滑函数族$\{\lambda_i\}$叫做**从属于覆盖 $\mathscr{Q}$ 的单位分解**.

推论 4.6 设 M 是光滑流形，F 是 M 的非空闭子集，G 是 M 的开集，$F \subset G$. 则存在 $g \in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，使得

$$F \subset \{p \in M \mid g(p) = 1\} \subset \text{supp}g \subset G.$$

若 F 是紧致集，则还可要求 $g \in C_c^\infty(M,\boldsymbol{R})$.

证明 记 $H = M \backslash F$，则 $\mathscr{Q} = \{G,H\}$是 M 的开覆盖. 根据定理 4.4，存在从属于 $\mathscr{Q} = \{G,H\}$的单位分解$\{\lambda_i\}$. 我们定义

$$g = \sum_{\text{supp}\lambda_i \subset G} \lambda_i,$$

则有

$$F = M\backslash H \subset \{p \in M \mid g(p) = 1\} \subset \mathrm{supp}g \subset G.$$

若 F 是紧致集，则存在 M 的开集 G_0，它的闭包 $\overline{G}_0$ 是紧致的，并且满足条件

$$F \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G.$$

以 G_0 代替 G，重复上面的讨论（或利用上面的结论），可以得到函数 $g_0 \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$，满足这样的条件：

$$F \subset \{p \in M \mid g_0(p) = 1\} \subset \mathrm{supp}g_0 \subset G_0.$$

因为 $\overline{G}_0$ 是紧致的，所以有 $g_0 \in C_c^\infty(M, \boldsymbol{R})$. □

推论 4.7 设 $\{G_i\}$ 是 M 的局部有限的开集族，K_i 是紧致集，$K_i \subset G_i$，并且

$$\bigcup_i K_i = M.$$

则存在 $\{\nu_i\} \subset C_c^\infty(M, \boldsymbol{R})$，满足条件：

(1) $0 \leqslant \nu_i \leqslant 1$，$\sum \nu_i \equiv 1$；

(2) $K_i \subset \mathrm{supp}\nu_i \subset G_i$.

证明 根据推论 4.6，存在 $\mu_i \in C_c^\infty(M, \boldsymbol{R})$，使得

$$K_i \subset \{p \in M \mid \mu_i(p) = 1\} \subset \mathrm{supp}\mu_i \subset G_i.$$

因为 $\{G_i\}$ 是局部有限族，所以

$$\sum_j \mu_j < +\infty.$$

又因为 $\{K_i\}$ 覆盖了 M，所以

$$\sum_j \mu_j \geqslant 1.$$

我们定义

$$\nu_i = \mu_i \Big/ \sum_j \mu_j,$$

则易验证：$\{\nu_i\}$ 满足全部要求. □

§ 5　紧流形嵌入 Euclid 空间

定义 5.1　设 M 和 N 是 C^r 流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，并赋予 $f(M)$ 作为 N 的子空间的拓扑. 如果 $f: M\to N$ 是 C^r 浸入，并且 f 是从 M 到 $f(M)$ 的一个同胚映射，那么我们就称 $f: M\to N$ 是一个 C^r **嵌入**. C^∞ 嵌入又称**光滑嵌入**.

定理 5.2　设 M 是紧致光滑流形，则存在光滑嵌入映射

$$f: M\to \boldsymbol{R}^L,$$

其中 L 是一个足够大的自然数.（以后我们将看到，$L=2\dim M+1$就足够了. 但这里的证明可能要求更大的 L.）

证明　对于每一点 $p\in M$，存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ)，使得

$$\varphi(p)=0,\quad \varphi(U)=B_3.$$

我们引入记号

$$V=\varphi^{-1}(B_2),\quad W=\varphi^{-1}(B_1).$$

由于 M 的紧致性，可以选择有限个这样的局部坐标图卡 $(U_1,\varphi_1),\cdots,(U_k,\varphi_k)$，使得相应的 $W_1,\cdots,W_k$ 覆盖了 M. 根据引理 4.3，存在 $\eta_i\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，满足条件：

$$\begin{cases}\eta_i(q)=1, & \forall q\in \overline{W}_i,\\ 0<\eta_i(q)<1, & \forall q\in V_i\backslash \overline{W}_i,\\ \eta_i(q)=0, & \forall q\in M\backslash V_i.\end{cases}$$

设 $\dim M=m$. 我们取 $L=km+k=k(m+1)$，并作这样一个映射

$$f: M\to \boldsymbol{R}^L,$$

其定义为

$$f(q)=(\eta_1(q)\varphi_1(q),\cdots,\eta_k(q)\varphi_k(q);\ \eta_1(q),\cdots,\eta_k(q)),$$

其中对 $\eta_i(q)\varphi_i(q)$ 的定义作了这样的扩充：规定

$$\eta_i(q)\varphi_i(q) = 0, \quad \forall q \in M \backslash V_i.$$

显然 $f: M \to \boldsymbol{R}^L$ 是光滑映射. 下面我们将证明：

(1) f 在每一点 $p \in M$ 都是浸入；

(2) f 是单映射.

首先，对任意的 $p \in M$，存在上面取定的某个 W_i，使得 $p \in W_i$. 在 p 点的开邻域 W_i 上，$f(q)$ 的分量中的一部分恰好是

$$\eta_i(q)\varphi_i(q) = \varphi_i(q),$$

因而 f 的局部表示 $\tilde{f} = f \circ \varphi_i^{-1}$ 具有这样的形状

$$\tilde{f}(x_1, \cdots, x_m) = (* * *, x_1, \cdots, x_m, * * * *).$$

据此容易证明：f 在 p 点是浸入.

其次，设 $q', q \in M$，使得 $f(q') = f(q)$，则有

$$\eta_i(q') = \eta_i(q), \quad i = 1, \cdots, k.$$

设 $q \in W_j$，则 $\eta_j(q) = 1$，因而 $\eta_j(q') = 1$. 这说明 $q' \in \overline{W}_j$. 限制在 $\overline{W}_j$，考察 f 的分量，可以得到

$$\eta_j(q')\varphi_j(q') = \eta_j(q)\varphi_j(q), \quad \varphi_j(q') = \varphi_j(q).$$

但在 $V_j \supset \overline{W}_j$ 上 φ_j 是同胚映射，因而必有 $q' = q$. 以上讨论证明了

$$f(q') = f(q) \Longrightarrow q' = q,$$

即 f 是单映射.

我们看到 $f: M \to \boldsymbol{R}^L$ 是一个单一的光滑的浸入. 点集拓扑学中有这样一个定理：紧空间映入 Hausdorff 空间的单一连续映射必为到其像集的同胚映射. 根据这一定理，我们可以断定：f 是从 M 到 $f(M) \subset \boldsymbol{R}^L$ 的同胚映射. 这就最后完成了定理的证明. □

练　习　B

B. 1. 试证下列空间(赋予通常的拓扑)都是第二可数空间：

(1) $\boldsymbol{R}$；(2) $\boldsymbol{R}^m$；(3) $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集.

B. 2. 设拓扑空间 M 可以表示成可数个开集的并集：

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k,$$

并且每个开集 U_k(赋有 M 的子空间拓扑)都是第二可数空间.求证 M 是第二可数空间.

B. 3. 试证：(1) 第二可数空间的子空间是第二可数空间；

(2) 局部紧致空间的闭子空间是局部紧致空间；

(3) 仿紧空间的闭子空间是仿紧空间.

B. 4. 设 M 是光滑流形(假定 M 满足第二可数公理)，A 和 B 是 M 的两个不相交的闭子集.试证存在 $\psi \in C^{\infty}(M, \boldsymbol{R})$，满足以下要求：

(1) $0 \leqslant \psi(p) \leqslant 1, \quad \forall p \in M$；

(2) $\psi(p) = 1, \quad \forall p \in A$；

(3) $\psi(p) = 0, \quad \forall p \in B$.

B. 5. 众所周知，圆周 S 是一维流形，并且能够很好地嵌入到 $\boldsymbol{R}^2$ 之中.现在，请你给出圆周 S 的由两个图卡组成的图汇，然后仿照定理 5.2 的证明，设法将 S 嵌入到 $\boldsymbol{R}^3$ 中去(可以设法使所嵌入的空间比定理 5.2 的证明中所要求的维数低一维).还请你描绘出用这种办法将 S 嵌入 $\boldsymbol{R}^3$ 的大致图形.通过这一练习，你能够凭借几何直观加强对定理 5.2 及其证明的理解.

B. 6. 设 M 是光滑流形，$\{K_i\}$ 是 M 的一个紧致集族，$\{V_i\}$ 是 M 的一个局部有限的开集族，$K_i \subset V_i$，$i=1,2,\cdots$，并且

$$\bigcup_i K_i = M.$$

则对任意给定的一族正实数$\{\varepsilon_i\}$，存在光滑函数$\varepsilon: M\to \boldsymbol{R}$，适合条件

$$0<\varepsilon(p)\leqslant \varepsilon_i,\quad \forall p\in K_i,\ i=1,2,\cdots.$$

提示　可按以下线索作出证明：

(1) 必要时缩小V_i，可设各个$\overline{V}_i$都是紧致的.

(2) 根据推论4.7，存在$\{\nu_i\}\subset C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，适合条件：

(a) $0\leqslant \nu_i\leqslant 1,\quad \sum_i \nu_i\equiv 1$；

(b) $K_i\subset\{p\in M\mid \nu_i(p)>0\}\subset \operatorname{supp}\nu_i\subset V_i$.

(3) 对于任意取定的j，证明$\lambda_j=\inf\{\varepsilon_i\mid \overline{V}_i\cap\overline{V}_j\neq\varnothing\}>0$.

(4) 验证如下定义的光滑函数ε适合题目的要求：

$$\varepsilon(p)=\sum_j \lambda_j\nu_j(p).$$

B.7. 设F是$\boldsymbol{R}^n$的闭子集. 试证存在$f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R})$，适合条件

(1) $f(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in\boldsymbol{R}^n$；

(2) $f^{-1}(0)=F$.

(提示：可参看文献[Go]，p. 17.)

第三章 Whitney 嵌入定理

§1 零 测 集

定义 1.0 设 $a_i, b_i \in \boldsymbol{R}$，$a_i < b_i$，$i = 1, \cdots, m$. 我们称 $\boldsymbol{R}^m$ 的子集

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_m, b_m)$$

为 m 维**开长方块**(或**开长方体**)，并将其体积定义为

$$|I| = \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i).$$

I 的闭包 $\overline{I}$ 被称为**闭长方块**(或**闭长方体**). 闭长方块 $\overline{I}$ 的体积定义为

$$|\overline{I}| = |I|.$$

定义 1.1 集合 $E \subset \boldsymbol{R}^m$ 被称为**零测集**，倘若对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在(至多)可数个 m 维开长方块 $I_1, I_2, \cdots$，使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon.$$

注记 1.2 将定义 1.1 中所提到的“开长方块”统统换成“开正方块”，所得到的陈述与原定义等价. 为说明这一事实，只须指出：$\boldsymbol{R}^m$ 中的任何一个开长方块 I 可以被体积之和不超过 $2^m|I|$ 的一些开正方块所覆盖.

证明 首先指出：给定开区间 (a,b) 和实数 $0 < l \leqslant b - a$，则 (a,b) 可以被 q 个长为 l 的开区间 (α_j, β_j) $(j \in \{1, \cdots, q\})$ 所覆盖，这些开区间的总长度

$$q\,l \leqslant 2(b - a).$$

事实上，可取正整数 q，使得

$$b-a=q\frac{l}{2}+r,\quad 0\leqslant r<\frac{l}{2}.$$

考察覆盖了(a,b)的 q 个开区间

$$(\alpha_j,\beta_j)=\left(a+\frac{j-1}{2}l,\ a+\frac{j+1}{2}l\right),\quad j=1,\cdots,q.$$

这 q 个开区间的总长度

$$q\,l=2(b-a)-2r\leqslant 2(b-a).$$

对于给定的 m 维开长方块

$$I=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_m,b_m),$$

我们取

$$l=\min\{b_i-a_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}.$$

对每个 $i\in\{1,\cdots,m\}$，存在 q_i 个长为 l 的开区间

$$(\alpha_{ij},\beta_{ij}),\quad j=1,\cdots,q_i,$$

这些开区间覆盖了(a_i,b_i)，并且长度之和

$$q_i\,l\leqslant 2(b_i-a_i).$$

于是以下这些各边长为 l 的正方块覆盖了 I：

$$(\alpha_{1,j_1},\beta_{1,j_1})\times(\alpha_{2,j_2},\beta_{2,j_2})\times\cdots\times(\alpha_{m,j_m},\beta_{m,j_m}),$$

$$j_i\in\{1,\cdots,q_i\},\quad i=1,\cdots,m.$$

这些正方块体积之总和为

$$q_1q_2\cdots q_m l^m\leqslant 2^m(b_1-a_1)\cdots(b_m-a_m)$$

$$=2^m|I|.\qquad\square$$

零测集的子集(显然)仍是零测集. 还容易证明：

命题 1.3 如果 $E\subset\boldsymbol{R}^m$ 能被(至多)可数个零测集 $E_1,E_2,\cdots$所覆盖，即

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\quad(E_i\text{ 是零测集},\ i=1,2,\cdots),$$

那么 E 也是零测集.

下面的命题 1.4 指出 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集可局部判定.

命题 1.4 为使 $E\subset\boldsymbol{R}^m$ 是零测集,必须而且只须对任何 $x\in E$,存在 x 点的开邻域 V,使得 $E\cap V$ 是零测集.

证明 "必要性"是显然的,下面证明"充分性".

对每一点 $x\in E$,存在该点的开邻域 U_x,使得 $E\cap U_x$ 是零测集.我们记

$$\mathscr{U}=\{U_x \mid x\in E\}.$$

显然 $E\subset U$. 因为 $U=\bigcup\limits_{x\in E}U_x$ 作为 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间是第二可数的,所以存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族

$$\mathscr{U}_0=\{U_1,U_2,\cdots\}\subset\mathscr{U}$$

仍然能覆盖 U. 因为 $E\cap U_i$ 是零测集($i=1,2,\cdots$),所以

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap U_i)$$

也是零测集. □

下面将证明:如果 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,$f\in C^1(U,\boldsymbol{R}^m)$,那么 f 将 U 中的零测集仍映成($\boldsymbol{R}^m$ 中的)零测集.讨论中将引用这样的记号 $|x|$: 对于 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in\boldsymbol{R}^m$,我们约定记

$$|x|:=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{|x_i|\}.$$

引理 1.5 $\boldsymbol{R}^m$ 中的任何非空开集 U 都可以表示成可数个闭长方块之并集:

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{I}_i.$$

引理 1.6 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,$\overline{I}$ 是包含于 U 中的闭长方块,$f\in C^1(U,\boldsymbol{R}^m)$,则 f 在 $\overline{I}$ 上满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\quad \forall x,y\in\overline{I},$$

其中 L 是非负实数.

下面的命题 1.7 指出：C^1 映射将 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集仍变成零测集.

命题 1.7 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的非空开集，$E\subset U$ 是零测集，$f\in C^1(U,\boldsymbol{R}^m)$，则 $f(E)$ 也是零测集.

证明 如前所述，U 可以表示成可数个闭长方块的并集：

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{I}_i.$$

我们记 $E_i=E\cap\overline{I}_i$，$i=1,2,\cdots$，则有

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i;\quad E_j\subset\overline{I}_j,\quad j=1,2,\cdots.$$

因为 f 在 $\overline{I}_i$ 上满足 Lipschiz 条件，所以 $f(E_i)$ 是零测集($i=1,2,\cdots$)，因而 $f(E)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f(E_i)$ 也是零测集. □

定义 1.8 设 M 是微分流形，$\dim M=m$. 集合 $E\subset M$ 被称为**零测集**，倘若 M 的任何一个局部坐标图卡 (U,φ) 都使得 $\varphi(U\cap E)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的零测集.

显然零测集的子集仍是零测集；至多可数个零测集的并集也仍是零测集.

命题 1.9 设 M 是微分流形，$\dim M=m$. 为使 $E\subset M$ 是零测集，必须而且只须：对任意的 $p\in E$，存在 p 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ)，使得 $\psi(V\cap E)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的零测集.

证明 条件的必要性是显然的，下面证明条件的充分性.

设对所有的 $p\in E$，都有命题中所述的那种局部坐标域 $V=V_p$. 约定记

$$\mathscr{V}=\{V_p\,|\,p\in E\},\quad W=\bigcup_{p\in E}V_p.$$

因为 W 作为第二可数空间 M 的子空间是第二可数的，所以存

在 $\mathscr{V}$ 的至多可数的子族 $\mathscr{V}_0=\{V_1,V_2,\cdots\}$，使得 $\mathscr{V}_0$ 仍然覆盖住 W.

对于 M 的任意一个局部坐标图卡 (U,φ)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi(U\cap E)&=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(U\cap V_i\cap E)\\&=\bigcup_{i=1}^{\infty}(\varphi\circ\psi_i^{-1})(\psi_i(U\cap V_i\cap E)).\end{aligned}$$

因为 $\psi_i(U\cap V_i\cap E)\subset\psi_i(V_i\cap E)$ 是零测集，$\psi_i(U\cap V_i\cap E)$ 包含在开集 $\psi_i(U\cap V_i)$ 中，并且

$$\varphi\circ\psi_i^{-1}\in C^1(\psi_i(U\cap V_i),\boldsymbol{R}^m),$$

所以 $\varphi\circ\psi_i^{-1}(\psi_i(U\cap V_i\cap E))$ 是零测集 $(i=1,2,\cdots)$. 由此得知 $\varphi(U\cap E)$ 是零测集. □

下面命题 1.11 的证明中（以及后面许多命题与定理的证明中），将用到一个涉及集合与映射的一般关系式（命题 1.10）：

命题 1.10 设 X 和 Y 是集合，$f:X\to Y$ 是一个映射，并设

$$A\subset X,\quad B\subset Y.$$

则有

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$

证明 首先，显然有

$$f(A\cap f^{-1}(B))\subset f(A)\cap f(f^{-1}(B))\subset f(A)\cap B.$$

其次

$$\begin{aligned}b\in f(A)\cap B&\Longrightarrow b=f(a)\in B,\ a\in A\\&\Longrightarrow b=f(a),\ a\in A\cap f^{-1}(B)\\&\Longrightarrow b\in f(A\cap f^{-1}(B)).\end{aligned}$$

至此，我们证明了

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$ □

命题 1.11 设 M 和 N 是微分流形，$\dim M=\dim N=m$，$f\in C^1(M,N)$. 如果 $E\subset M$ 是零测集，那么 $f(E)\subset N$ 也是零测集.

证明 取可数个 M 的图卡 (U_i,φ_i)，使得 $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 覆盖 M. 记 $E_i=U_i\cap E$ $(i=1,2,\cdots)$. 只须证明每个 $f(E_i)$ 都是 N 中的零测集. 为此，考察任意一点 $q\in N$ 和 q 点邻近的 N 的任意一个局部坐标图卡 (V,ψ). 记 $W_i=f^{-1}(V)\cap U_i$（这里 $f^{-1}(V)$ 是集合 V 关于映射 f 的原像集）. 则有

$$\begin{aligned}\psi(V\cap f(E_i)) &= \psi\circ f(f^{-1}(V)\cap E_i)\\ &= \psi\circ f(f^{-1}(V)\cap U_i\cap E)\\ &= \psi\circ f(W_i\cap E)\\ &= \psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(W_i\cap E)).\end{aligned}$$

因为 $\varphi_i(W_i\cap E)$ 是零测集，并且

$$\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}\in C^1(\varphi_i(W_i),\boldsymbol{R}^m),$$

所以 $\psi(V\cap f(E_i))=\psi\circ f\circ\varphi_i^{-1}(\varphi_i(W_i\cap E))$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的零测集. □

定理 1.12（弱 Sard 定理） 设 M 和 N 是微分流形，$\dim M<\dim N$，$f\in C^{-1}(M,N)$，则 $f(M)$ 是 N 中的零测集.

证明 设 $\dim M=m$，$\dim N=n$. 定义乘积流形 $L=M\times\boldsymbol{R}^{n-m}$ 和映射

$$F: L=M\times\boldsymbol{R}^{n-m}\to N,$$
$$(p,\zeta)\mapsto f(p).$$

显然有 $\dim L=\dim N=n$. 因为 $M\times\{0\}$ 是 $L=M\times\boldsymbol{R}^{n-m}$ 中的零测集，并且 $F\in C^1(L,N)$，所以

$$F(M\times\{0\})=f(M)$$

是 N 中的零测集. □

§2 Whitney 浸入定理

由全体 $n\times m$ 矩阵组成的集合 $M(n,m)$，可等同于 $\mathbf{R}^{nm}$ 而赋有相应的拓扑. 我们来考察空间 $M(n,m)$ 中由全体秩为 k 的矩阵组成的子空间 $M(n,m,k)$.

引理 2.0 空间 $M(n,m)$ 中全体秩为 k 的矩阵组成的子空间 $M(n,m,k)$ 可赋予 C^∞ 结构而成为一个维数为

$$nm-(n-k)(m-k)$$

的 C^∞ 流形.

证明 左上角的 $k\times k$ 子阵非退化的全体 $n\times m$ 矩阵组成空间 $M(n,m)$ 的一个开集合 G_0. 记 $U_0=G_0\cap M(n,m,k)$，则任何一个 $X\in U_0$ 可以写成

$$X=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\begin{array}{l} \}k \\ \}n-k \end{array},\quad \det A\neq 0.$$
$$\quad\ \underbrace{\qquad}_{k}\ \underbrace{\qquad}_{m-k}$$

以满秩 $n\times n$ 方阵

$$L=\left[\begin{array}{c|c} I_{k\times k} & 0 \\ \hline -CA^{-1} & I_{(n-k)\times(n-k)} \end{array}\right]$$

左乘 X 得到

$$LX=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D-CA^{-1}B \end{array}\right].$$

因为 $\operatorname{rank}(LX)=\operatorname{rank}X=k$，所以必有

$$D-CA^{-1}B=0,\quad D=CA^{-1}B.$$

这说明 X 的各子块中，只有 A,B,C 这三个子块是独立的，第四

个子块 D 完全由前三个子块决定.我们可以选取 A,B 和 C 这三个子块的分量(共计 $nm-(n-k)(m-k)$ 个分量)作为 U_0 中矩阵的局部坐标.如果定义

$$\varphi_0\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

那么 (U_0,φ_0) 就是 $M(n,m,k)$ 的一个图卡.

对一般的 $X_1\in M(n,m,k)$,存在 $n\times n$ 置换阵 P_1 和 $m\times m$ 置换阵 Q_1,使得 $P_1X_1Q_1$ 的左上角的 $k\times k$ 子阵非退化,即使得 $P_1X_1Q_1\in U_0$.考察 $M(n,m,k)$ 的开集

$$U_1=P_1^{-1}U_0Q_1^{-1}.$$

在这开集上可以定义局部坐标

$$\varphi_1(X_1)=\varphi_0(P_1X_1Q_1).$$

于是 (U_1,φ_1) 也成为 $M(n,m,k)$ 的一个图卡.

这样,$M(n,m,k)$ 为有限个开集 U_0, $U_1,\cdots,U_{l-1}$ 所覆盖,其中

$$l=\binom{n}{k}\binom{m}{k}.$$

在 U_i 上我们定义局部坐标 $\varphi_i(X)=\varphi_0(P_iXQ_i)$.如果 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$,那么 φ_i 与 φ_j 之间的坐标变换为

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\right)=\varphi_0\left(P_jP_i^{-1}\begin{bmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{bmatrix}Q_i^{-1}Q_j\right),$$

这显然是 C^∞ 映射. □

命题 2.1 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,$n\geqslant 2m$,$f\in C^\infty(U,\boldsymbol{R}^n)$.则对任给的正实数 γ,存在 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})$,满足条件

$$|A|=\max_{i,j}\{|a_{ij}|\}<\gamma,$$

使得

$$g(x)=f(x)+Ax$$

在 U 上是浸入.

证明 对于待定的 $A\in M(n,m)$，考察映射

$$g(x)=f(x)+Ax.$$

要使 g 为浸入，A 应选择使得 $\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)+A$ 的秩不小于 m. 换句话说，我们希望选择 A 使得

$$\mathrm{D}f(x)+A\neq B,\quad \forall B\in M(n,m,k),$$
$$k\in\{0,1,\cdots,m-1\},\ x\in U.$$

也就是

$$A\neq B-\mathrm{D}f(x),\quad \forall B\in M(n,m,k),$$
$$k\in\{0,1,\cdots,m-1\},\ x\in U.$$

为此，对于 $k<m$，考察这样的映射

$$\psi_k: M(n,m,k)\times U\to M(n,m),$$
$$(B,x)\mapsto B-\mathrm{D}f(x).$$

因为 $n\geqslant 2m$，

$$\begin{aligned}&nm-(n-k)(m-k)+m\\&\leqslant nm-[n-(m-1)][m-(m-1)]+m\\&=nm-(n-2m)-1\\&\leqslant nm-1,\end{aligned}$$

$$\dim(M(n,m,k)\times U)<\dim M(n,m),$$

所以 $\psi_k(M(n,m,k)\times U)$应是 $M(n,m)$中的零测集. 我们可以在

$$M(n,m)\setminus\bigcup_{k=0}^{m-1}\psi_k(M(n,m,k)\times U)$$

之中选择 A，满足条件$|A|<\gamma$. 这样选择的 A 就使得

$$\mathrm{D}f(x)+A\notin M(n,m,k),\quad \forall x\in U,\ k<m.$$

映射 $g(x)=f(x)+Ax$ 使得

$$\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)+A\notin M(n,m,k),$$
$$\forall x\in U,\quad k=0,1,\cdots,m-1.$$

因而 g 在 U 上是浸入. □

记号约定 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，K 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的紧致集，

$K\subset U$. 考察映射 $f\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n)$. 设对于 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in U$ 有

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$$
$$=(f_1(x_1,\cdots,x_m),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_m)).$$

我们约定记：

$$|f|_K^{(0)}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sup_{x\in K}\{|f_i(x)|\},$$

$$|f|_K^{(1)}=\max\left\{|f|_K^{(0)},\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_K^{(0)},\cdots,\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right|_K^{(0)}\right\}.$$

命题 2.2 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，K 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的紧致集，$K\subset U$. 如果 $f\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n)$ 在 K 上是浸入，那么存在 $\delta>0$，使得对任何

$$g\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n),\quad |g-f|_K^{(1)}<\delta$$

都有：g 在 K 上是浸入.

证明 对于 $g\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n)$，$x\in U$，我们定义

$$\Delta(g,x)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_m}(x)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g_{i_m}}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial g_{i_m}}{\partial x_m}(x)\end{vmatrix}^2.$$

因为 $\qquad \operatorname{rank} Df(x)=m,\quad \forall x\in K,$

所以有 $\qquad \Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K.$

于是，存在 $\delta>0$，使得只要 $g\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n)$，$|g-f|_K^{(1)}<\delta$，也就有

$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.\qquad \square$$

命题 2.3 设 M 是光滑流形，$\dim M=m$，$n\geqslant 2m$，并设

(1) $H\subset M$ 是闭集，$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$ 在 H 上是浸入；

(2) (U,φ) 是 M 的图卡，$\varphi(U)=B_3$（我们约定记：

$$V=\varphi^{-1}(B_2),\quad W=\varphi^{-1}(B_1));$$

(3) ε 是任意给定的正实数，

则存在 $g\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}^n)$，满足条件：

(a) $g(p)=f(p)$，$\forall p\in M\backslash V$；

(b) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上是浸入；

(c) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon$，$\forall p\in M$（其中的 $\|\cdot\|$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Euclid 范数）.

证明 考察紧致集

$$K = H\cap\overline{V}\subset U$$

和映射

$$\widetilde{f}= f\circ\varphi^{-1}\in C^{\infty}(\varphi(U),\boldsymbol{R}^n).$$

根据命题 2.2，存在 $\delta>0$，使得只要 $|\widetilde{g}-\widetilde{f}|_{\varphi(K)}^{(1)}<\delta$，就能保证 $\widetilde{g}$ 在 $\varphi(K)$ 上是浸入.

选取 $\eta\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall\, p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall\, p\in V\backslash\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall\, p\in M\backslash V.\end{cases}$$

在 $\varphi(U)=B_3$ 上，对映射 $\widetilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 用命题 2.1，可知存在任意小的 $A\in M(n,m)$，使得 $\widetilde{f}(x)+Ax$ 是从 $\varphi(U)=B_3$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的浸入. 我们定义

$$g(p)=f(p)+\eta(p)A\varphi(p).$$

这里同以前一样补充规定

$$\eta(p)A\varphi(p)=0,\quad \forall\, p\in M\backslash V.$$

局部看来

$$\widetilde{g}(x)=g\circ\varphi^{-1}(x)=\widetilde{f}(x)+\eta(\varphi^{-1}(x))Ax.$$

只要 A 选取得充分小，当然可使 $|\tilde{g}-\tilde{f}|_{\varphi(K)}^{(1)}<\delta$.

考察 g 的构造，容易得出以下这些结论：

(1) $g(p)=f(p)$, $\forall p\in M\backslash V$.

(2) 在 $K=H\cap\overline{V}$ 上 g 是浸入，在 $H\backslash\overline{V}$ 上，$g=f$ 当然也是浸入，因而 g 在 H 上是浸入. 另一方面，在 $\overline{W}$上，g 的局部表示为 $\tilde{g}(x)=\tilde{f}(x)+Ax$，因而 g 在 $\overline{W}$上是浸入. 于是，g 在 $H\cup\overline{W}$上是浸入.

(3) 只要 A 选择得足够小，当然可使

$$\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M.\qquad \square$$

定理 2.4（Whitney 浸入定理） 设 M 是 C^∞流形，

$$\dim M=m,\quad n\geqslant 2m.$$

则对任何 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$和任何 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$，使得

(1) g 是从 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的浸入；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon$, $\forall p\in M$.

（对于给定的 $n\geqslant 2m$，一定存在 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$，例如：$f\equiv 0$. 由此得知，任何 m 维光滑流形 M 都可以光滑地浸入到 $2m$ 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{2m}$中去.）

证明 取 M 的可数个局部坐标图卡$\{(U_i,\varphi_i)\}$和开集

$$V_i,W_i\subset U_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

满足如下条件：

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$是局部有限的；

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$, $i=1,2,\cdots$;

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$覆盖 M.

我们归纳构造一列映射$\{f_i\}\subset C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$. 首先，取

$$f_{-1}=f_0=f,$$

并记 $V_0=W_0=\varnothing$. 假定 $f_j(j=0,1,\cdots,k-1)$已定义妥当，满足下面的条件：

(a_j) $f_j(p)=f_{j-1}(p)$, $\forall p\in M\setminus V_j$;

(b_j) f_j 在集合

$$H_j=\bigcup_{i=0}^{j}\overline{W}_i$$

上是浸入；

(c_j) $\|f_j(p)-f_{j-1}(p)\|<\frac{\varepsilon}{2^j}$, $\forall p\in M$.

根据命题 2.3，存在 $f_k\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$，使得

(a_k) $f_k(p)=f_{k-1}(p)$, $\forall p\in M\setminus V_k$;

(b_k) f_k 在集合

$$H_k=H_{k-1}\cup\overline{W}_k=\bigcup_{i=0}^{k}\overline{W}_i$$

上是浸入；

(c_k) $\|f_k(p)-f_{k-1}(p)\|<\frac{\varepsilon}{2^k}$, $\forall p\in M$.

$\mathscr{W}=\{W_i\}$覆盖了 M. 对任意一个 W_{l_0}，因为 $\mathscr{V}=\{V_i\}$是局部有限族，所以紧致集 $\overline{W}_{l_0}$只与 $\mathscr{V}$ 中有限个集合相交. 于是，存在 $k_0>l_0$ 使得

$$V_k\cap\overline{W}_{l_0}=\varnothing,\quad \forall k>k_0.$$

由此可知

$$f_k(p)=f_{k+1}(p),\quad \forall p\in W_{l_0},\ k>k_0.$$

因而可以定义

$$g(p)=\lim_{k\to\infty}f_k(p),\quad p\in M. \tag{2.1}$$

考察函数序列$\{f_k\}$及其极限函数 g，还能得到更进一步的结论：

(1) 如上所述，对任意一个 W_{l_0}，存在自然数 $k_0>l_0$，使得

$$g(p) = f_k(p), \quad \forall p \in W_{l_0}, k > k_0.$$

因为 $f_k \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$ 并且 f_k 在集合 $H_k \supset \overline{W}_{l_0}$ 上是浸入，所以 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$ 并且 g 是浸入映射.

(2) 从(2.1)的等价形式

$$(2.2) \qquad g(p) = f(p) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(p) - f_{k-1}(p)),$$

容易得知

$$\|g(p) - f(p)\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon, \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

注记 2.5 命题 2.1～命题 2.3 为证明定理 2.4 作准备. 命题 2.1 断定：映射 $f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$ 在任何一个局部坐标域上可以经过小的改动而变成浸入. 命题 2.2 保证：映射 $f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$ 在紧致集 K 上的浸入性质是稳定的，即不会因 f 的小的扰动而遭到破坏. 这两个命题相结合，使得我们可以一小块又一小块地逐步对 f 作小的修改，每次修改后得到的映射在新的一小块上成为浸入而又不损害在原有若干块上的浸入性质. 最后就能得到一个浸入映射 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$. 类似这样的证明手法以后还将多次用到. 务请读者对这里的典范做法细心加以体会.

说明 2.6 我们把既是“单映射”又是“浸入映射”的映射叫做**单浸入**. 如果将定理 2.4 中的条件 $n \geqslant 2m$ 加强到 $n > 2m$，那么就能保证存在从 m 维光滑流形 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的单浸入. 下面的定理 2.7 将证明这一事实. 为了说明定理 2.7 证明中的关键技巧，这里叙述并证明一个辅助引理. 因为该引理只起启发思考的作用，引理所证明的事实已包含在定理 2.7 的证明之中，所以不给该引理单独编号，只作为本说明的一部分.

引理 设 M 是 C^∞ 流形，

$$\dim M = m, \quad 2m < n;$$

G 是 M 的开子集，(U,φ)是 M 的局部坐标图卡，

$$W \subset V \subset U,$$

$$\varphi(U) = B_3,\ \varphi(V) = B_2,\ \varphi(W) = B_1.$$

又设

(1) $f \in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$限制于 G 上和限制于 U 上都是单映射；

(2) $\eta \in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$满足条件

$$\eta(p) \begin{cases} = 1, & \text{对于 } p \in \overline{W}, \\ \in (0,1), & \text{对于 } p \in V \backslash \overline{W}, \\ = 0, & \text{对于 } p \in M \backslash V; \end{cases}$$

(3) $\gamma > 0$,

则存在 $b \in \boldsymbol{R}^n$，$\|b\| < \gamma$，使得如下定义的 $g \in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$在$G \cup V$上是单映射：

$$g(p) = f(p) + \eta(p)b.$$

引理的证明 我们记

$$D = \{(p,q) \in M \times M \mid \eta(p) \neq \eta(q)\}.$$

显然 D 是 $M \times M$ 中的开集. 然后定义这样一个映射

$$\theta:\ D \to \boldsymbol{R}^n,$$

$$(p,q) \mapsto -\frac{f(p) - f(q)}{\eta(p) - \eta(q)}.$$

因为

$$2m < n,$$

所以 $\theta(D)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 因而存在

$$b \in \boldsymbol{R}^n \backslash \theta(D), \quad \|b\| < \gamma.$$

这样的 b 将使得

$$g(p) = f(p) + \eta(p)b$$

在 $G\cup V$ 上是单映射(验证如下).

对于 $p,q\in G\cup V$，假如

$$g(p)=g(q),$$

那么必定有

$$\eta(p)=\eta(q).$$

否则将导致矛盾：

$$b=-\frac{f(p)-f(q)}{\eta(p)-\eta(q)}\in\theta(D).$$

我们看到：对于 $p,q\in G\cup V$，

$$g(p)=g(q)\Longrightarrow\begin{cases}\eta(p)=\eta(q)\\ f(p)=f(q)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}p,q\in V\text{ 或 }p,q\in G\backslash V\\ f(p)=f(q)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow p=q.$$

这证明了 g 在 $G\cup V$ 上是单映射. □

有了这个引理，当然可以仿照定理 2.4 证明中的做法，从任何一个浸入映射 $f\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}^n)$ 开始，逐步构造一个 C^{∞} 单浸入映射(这一构造过程可作为很好的练习). 下面定理 2.7 的证明采用归纳方式对逐步构造的过程作了统一的处理.

定理 2.7(Whitney 单浸入定理) 设 M 是 C^{∞} 流形，

$$\dim M=m,\quad n>2m.$$

则对任何浸入映射 $f\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}^n)$ 和任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}^n)$，满足这样的条件：

(1) $g:M\to\boldsymbol{R}^n$ 是单浸入；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall p\in M$.

证明 从浸入的典范局部表示(第一章命题 4.1)可以看出，对任何 $q\in M$，存在 q 点的开邻域 Q，使得 $f|Q$ 是单一的. 以 $\mathscr{Q}$ 表示所有这样的 Q 组成的开集族，则 $\mathscr{Q}$ 是 M 的开覆盖. 根

据第二章定理 3.1，存在 M 的可数个局部坐标图卡(U_i,φ_i)和开集 V_i,W_i，使得

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$是局部有限族，$\mathscr{U}\prec\mathscr{Q}$；

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3$，$\varphi_i(V_i)=B_2$，$\varphi_i(W_i)=B_1$，$i=1,2,\cdots$；

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$覆盖 M.

取 $\eta_i\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})(i=1,2,\cdots)$满足条件：

$$\begin{cases}\eta_i(p)=1, & \forall p\in\overline{W}_i,\\ 0<\eta_i(p)<1, & \forall p\in V_i\setminus\overline{W}_i,\\ \eta_i(p)=0, & \forall p\in M\setminus V_i.\end{cases}$$

我们按以下方式归纳构造浸入映射序列$\{f_i\}\subset C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$. 首先取 $f_0=f$. 假定 $f_0,\cdots,f_{k-1}$已定义妥当，我们将选取适当的 $b_k\in\boldsymbol{R}^n$，$\|b_k\|<\varepsilon/2^k$，使得

$$f_k(p)=f_{k-1}(p)+\eta_k(p)b_k$$

满足下面的条件：

(a) f_k 是浸入映射；

(b) $f_k(p)=f_k(q)\Longrightarrow\begin{cases}\eta_k(p)=\eta_k(q),\\ f_{k-1}(p)=f_{k-1}(q).\end{cases}$

根据命题 2.2 只要 b_k 选取得充分小，就能保证条件(a)得到满足. 为了使条件(b)也得到满足，我们定义集合

$$D_k=\{(p,q)\in M\times M\mid\eta_k(p)\neq\eta_k(q)\}$$

和映射

$$\theta_k:\quad D_k\to\boldsymbol{R}^n,$$

$$(p,q)\mapsto-\frac{f_{k-1}(p)-f_{k-1}(q)}{\eta_k(p)-\eta_k(q)}.$$

因为 $\dim(M\times M)=2m<n$，所以 $\theta_k(D_k)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 我

们可以选取任意小的 $b_k \in \boldsymbol{R}^n \backslash \theta_k(D_k)$. 这样选择的 b_k 就能保证映射 $f_k(p)=f_{k-1}(p)+\eta_k(p)b_k$ 满足条件(b). 事实上，假如

$$f_k(p) = f_k(q), \quad \eta_k(p) \neq \eta_k(q),$$

那么

$$b_k = -\frac{f_{k-1}(p) - f_{k-1}(q)}{\eta_k(p) - \eta_k(q)}, \quad (p,q)\in D_k.$$

这与 $b_k \notin \theta_k(D_k)$ 相矛盾.

因为 $\overline{W}_{l_0}$ 是紧致集，$\mathscr{V}=\{V_i\}$ 是局部有限集族，所以(通过类似于定理 2.4 证明中的讨论可知)对任意一个 W_{l_0}，存在 $k_0 > l_0$，使得

$$f_k(p) = f_{k+1}(p), \quad \forall p \in W_{l_0},\ k \geqslant k_0.$$

又因为 $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M，所以对任意的 $p\in M$，存在极限

$$g(p) = \lim_{k\to\infty} f_k(p),$$

并且有

$$g(p) = f_k(p), \quad \forall p \in W_{l_0},\ k \geqslant k_0.$$

对这样定义的映射 $g: M\to \boldsymbol{R}^n$，可证明以下一些结论：

(0) $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$ 并且 g 是浸入映射；

(1) $g: M\to \boldsymbol{R}^n$ 是单映射；

(2) $\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\ \forall p\in M$.

结论(0)和(2)几乎是显然的. 下面验证结论(1). 假设

$$p,q\in M, \quad g(p) = g(q).$$

如前所述，存在自然数 $k(p)$ 和 $k(q)$，分别使得

$$g(p) = f_k(p), \quad \forall k \geqslant k(p);$$

$$g(q) = f_k(q), \quad \forall k \geqslant k(q).$$

因而

$$f_k(p) = f_k(q), \quad \forall k \geqslant \max(k(p),k(q)).$$

于是

$$f_k(p)=f_k(q)\Longrightarrow\begin{cases}\eta_k(p)=\eta_k(q)\\ f_{k-1}(p)=f_{k-1}(q)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\eta_{k-1}(p)=\eta_{k-1}(q)\\ f_{k-2}(p)=f_{k-2}(q)\end{cases}\Longrightarrow\cdots.$$

这样，从 $g(p)=g(q)$ 出发，可以得到

$$\begin{cases}\eta_j(p)=\eta_j(q), \quad j=1,2,\cdots,\\ f(p)=f_0(p)=f_0(q)=f(q).\end{cases}$$

设 $p\in W_h$，则由 $\eta_h(q)=\eta_h(p)=1$ 可知

$$q\in\overline{W}_h\subset V_h.$$

因为 $f|V_h$ 是单映射，并且

$$p,q\in V_h,\quad f(p)=f(q),$$

所以 $p=q$. 这证明了 $g: M\to \boldsymbol{R}^n$ 是单映射. □

§3 常态映射与 Whitney 嵌入定理

点集拓扑学中有这样的定理："紧空间到 Hausdorff 空间中的单一连续映射是到像集的同胚." 我们先对这定理作一剖析，然后设法加以推广.

要证明单一连续映射 $f: X\to Y$ 是到像集的同胚，只须证明 f 是闭映射，即只须证明："f 将 X 中的闭集映成 Y 中的闭集". 如果 X 是紧空间，Y 是 Hausdorff 空间，那么对于 X 的任何闭集 F，像集 $f(F)$ 是 Y 中的紧致集，因而也是闭集.

为了推广上述定理，先介绍常态映射(proper mapping)的概念.

定义 3.1 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间，$f: X\to Y$ 是

连续映射. 如果 Y 中任何紧致集 K 的原像集 $f^{-1}(K)$ 都是 X 中的紧致集，那么我们就称 f 为**常态映射**.

引理 3.2 设 Y 是局部紧 Hausdorff 空间，则关于 Y 的子集 S 是否闭集，有这样的判别准则：

$$S\text{ 是 }Y\text{ 的闭集}\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{对 }Y\text{ 的任何紧致集 }K,\\ \text{交集 }S\cap K\text{ 是紧致集.}\end{cases}$$

证明 “$\Longrightarrow$”部分是显然的. 为了证明“$\Longleftarrow$”部分，只须指出：对任意的 $y\in Y\backslash S$，有 y 的某个邻域 V 与 S 不相交.

首先，取 y 的邻域 W，使得 $K=\overline{W}$ 是紧致集. 因为 y 不属于紧致集 $K\cap S$，所以存在 y 的邻域 $V\subset W$，使得

$$V\cap(K\cap S)=\varnothing. \tag{3.1}$$

因为 $V\subset W\subset\overline{W}=K$，所以(3.1)式也就是

$$V\cap S=\varnothing. \qquad\square \tag{3.2}$$

在下面定理的证明中，将用到这样一个关系式：设 X 和 Y 是集合，$f: X\to Y$ 是一个映射，$A\subset X$, $B\subset Y$，则有

$$f(A\cap f^{-1}(B))=f(A)\cap B.$$

(参看命题 1.10.)

定理 3.3 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，Y 是局部紧 Hausdorff 空间，$f: X\to Y$ 是常态映射. 则 f 是闭映射. 如果 f 还是单映射，那么 f 是从 X 到 $f(X)$ 的同胚.

证明 设 F 是 X 的任意一个闭集，K 是 Y 的任意一个紧致集，我们来考察

$$f(F)\cap K=f(F\cap f^{-1}(K)).$$

因为 $F\cap f^{-1}(K)$ 是 X 中的紧致集，f 是连续映射，所以 $f(F)\cap K=f(F\cap f^{-1}(K))$ 是 Y 中紧致集. 根据引理 3.2，可以断定 $f(F)$ 是 Y 中闭集.

这样，我们证明了 f 是闭映射. 定理的其余部分是这一结

论的推论. □

注记 3.4

(1) 设 Y 是 Hausdorff 拓扑空间. 如果对于"Y 的子集 S 是否闭集"有如同引理 3.2 中那样的判别准则,那么我们就称 Y 为**紧生成空间**.

(2) 局部紧 Hausdorff 空间是紧生成空间(引理 3.2). 任何距离空间也都是紧生成空间(练习 C.6).

(3) 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间,Y 是紧生成空间,$f: X\to Y$是常态映射,则 f 是闭映射. 如果 f 还是单映射,那么 f 是从 X 到 $f(X)$的同胚(练习 C.7).

引理 3.5 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间,$f: X\to \boldsymbol{R}^n$ 是连续映射,$p_1: \boldsymbol{R}^n\to \boldsymbol{R}$ 是到第一个因子空间的投影映射. 若 $f_1=p_1\circ f$ 是常态映射,则 f 也是常态映射.

证明 对于任意一个紧致集 $K\subset\boldsymbol{R}^n$,投影 $p_1(K)$是 $\boldsymbol{R}$ 中的紧致集,因而是有界闭集. 不妨设 $p_1(K)\subset[-L,L]$,则

$$K\subset p_1^{-1}([-L,L]),\quad f^{-1}(K)\subset f^{-1}(p_1^{-1}([-L,L])).$$

因为 $f_1: X\to\boldsymbol{R}$ 是常态映射,

$$f^{-1}(p_1^{-1}([-L,L])=(p_1\circ f)^{-1}([-L,L])$$
$$=f_1^{-1}([-L,L])$$

是 X 中的紧致集,而 $f^{-1}(K)$是其闭子集,所以 $f^{-1}(K)$也是紧致集. □

引理 3.6 设 M 是 C^∞流形,则存在 C^∞常态映射

$$f: M\to\boldsymbol{R}^n,$$

这里 $n\in N$.

证明 首先,取 M 的可数个局部坐标图卡(U_i,φ_i)和开集 $V_i,W_i(i=1,2,\cdots)$,满足这样一些条件:

(1) $\mathscr{U}=\{U_i\}$是局部有限集合族;

(2) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$, $i=1,2,\cdots$;

(3) $\mathscr{W}=\{W_i\}$覆盖 M.

然后取 $\eta_j\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$,满足条件

$$\begin{cases}\eta_j(p)=1, & \forall p\in \overline{W}_j,\\ 0<\eta_j(p)<1, & \forall p\in V_j\backslash\overline{W}_j,\\ \eta_j(p)=0, & \forall p\in M\backslash V_j.\end{cases}$$

我们定义

$$\alpha(p)=\sum_{j=1}^{\infty}j\,\eta_j(p).$$

易见 $\alpha\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$. 还可证明 $\alpha:M\to\boldsymbol{R}$ 是常态映射. 为此,考察 $\boldsymbol{R}$ 的任意一个紧致集 K,可设 $K\subset[-L,L]$. 因为

$$\alpha^{-1}(K)\subset\alpha^{-1}([-L,L])\subset\bigcup_{j=1}^{L}\overline{W}_j,$$

并且 $\bigcup_{j=1}^{L}\overline{W}_j$ 是紧致集,所以它的闭子集 $\alpha^{-1}(K)$也是紧致集.

利用上面构造的 C^∞ 常态映射 $\alpha:M\to\boldsymbol{R}$,我们定义映射 $f:M\to\boldsymbol{R}^n$ 如下:

$$f(q)=(\alpha(q),0,\cdots,0).$$

根据引理 3.5,显然 f 是 C^∞ 常态映射. □

引理 3.7 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间,$f:X\to\boldsymbol{R}^n$ 是常态映射,$g:X\to\boldsymbol{R}^n$ 是连续映射. 如果

$$\|g(p)-f(p)\|\leqslant 1,\quad \forall p\in X,$$

那么 g 也是常态映射.

证明 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任何紧致集 K 都是有界闭集,可设 $K\subset\overline{B}_r$. 因为

$$\|f(p)\|\leqslant\|g(p)\|+1,\quad \forall p\in X,$$

所以

$$g^{-1}(K)\subset g^{-1}(\overline{B}_r)\subset f^{-1}(\overline{B}_{r+1}).$$

于是，作为紧致集 $f^{-1}(\overline{B}_{r+1})$ 的闭子集，$g^{-1}(K)$ 必定是紧致集. □

定理 3.8（Whitney 嵌入定理） 设 M 是 m 维 C^∞ 流形，$n\geqslant 2m+1$. 则存在从 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的 C^∞ 嵌入映射

$$h: M\to \boldsymbol{R}^n,$$

使得 $h(M)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭子集.

证明 任取一个从 M 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的 C^∞ 常态映射 f. 根据定理 2.4 存在浸入映射 $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\|g(p)-f(p)\|<1/2,\quad \forall p\in M.$$

根据定理 2.7，又存在单浸入 $h\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\|h(p)-g(p)\|\leqslant 1/2,\quad \forall p\in M.$$

因为 $\|h(p)-f(p)\|<1$，$\forall\ p\in M$，所以 $h: M\to\boldsymbol{R}^n$ 也是常态映射，因而 h 是闭映射，并且是从 M 到 $h(M)\subset\boldsymbol{R}^n$ 的同胚. 这样的 h 满足定理的全部要求. □

下面的引理能帮助我们进一步理解 Whitney 嵌入定理的涵义：任何 C^∞ 流形都可看作适当的 Euclid 空间的正则子流形.

引理 3.9 设 M 和 N 是 C^r 流形，$h: M\to N$ 是 C^r 嵌入映射 $(r\geqslant 1)$，则 $M'=h(M)$ 是 N 的 C^r 正则子流形，并且 $h: M\to M'$ 是 C^r 同胚.

证明 考察任意一点 $q=h(p)\in M'=h(M)$. 因为 $h: M\to N$ 是浸入映射，所以存在 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (U,φ) 和 $q=h(p)$ 点邻近的 N 的局部坐标图卡 (W,ψ)，使得

$$h(U)\subset W,\quad \varphi(p)=0,\quad \psi(q)=0,$$

$$\psi\circ h\circ\varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_m,0,\cdots,0),$$

$$\forall (x_1,\cdots,x_m)\in\varphi(U).$$

上面最后一个等式可以写做

(3.3) $\quad \psi \circ h(p') = (\varphi(p'), 0) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}, \quad \forall p' \in U,$

因而有

(3.4) $$\psi(h(U)) = \varphi(U) \times 0.$$

又因为 $h: M \to M' = h(M)$ 是同胚映射，并且 M' 赋有作为 N 的子空间的拓扑，所以 $h(U)$ 是 M' 中的开集，因而存在 N 的开集 Q，使得

(3.5) $$h(U) = Q \cap M'.$$

于是

(3.6) $$q = h(p) \in h(U) \subset W \cap Q.$$

我们注意到：

(1) $\varphi(U)$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的开集，并且含有 $\varphi(p) = 0$；

(2) $\psi(W \cap Q)$ 是 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m}$ 中的开集，并且含有

$$\psi(h(p)) = \psi(q) = 0.$$

因此，存在 $\mathbf{R}^m$ 中含有原点的开集 G 和 $\mathbf{R}^{n-m}$ 中含有原点的开集 H，使得

$$G \subset \varphi(U), \quad G \times H \subset \psi(W \cap Q).$$

我们取

$$V = \psi^{-1}(G \times H) \subset W \cap Q,$$

则 V 是 $q = h(p)$ 点在 N 中的开邻域(参看图 6)，并且

$$\begin{aligned}
\psi(V \cap M') &= \psi((V \cap W \cap Q) \cap M') \\
&= \psi((V \cap W) \cap (Q \cap M')) \\
&= \psi(V \cap h(U)) \\
&= \psi(V) \cap \psi(h(U)) \\
&= (G \times H) \cap (\varphi(U) \times 0) \\
&= G \times 0 \\
&= (G \times H) \cap (\mathbf{R}^m \times 0) \\
&= \psi(V) \cap (\mathbf{R}^m \times 0).
\end{aligned}$$

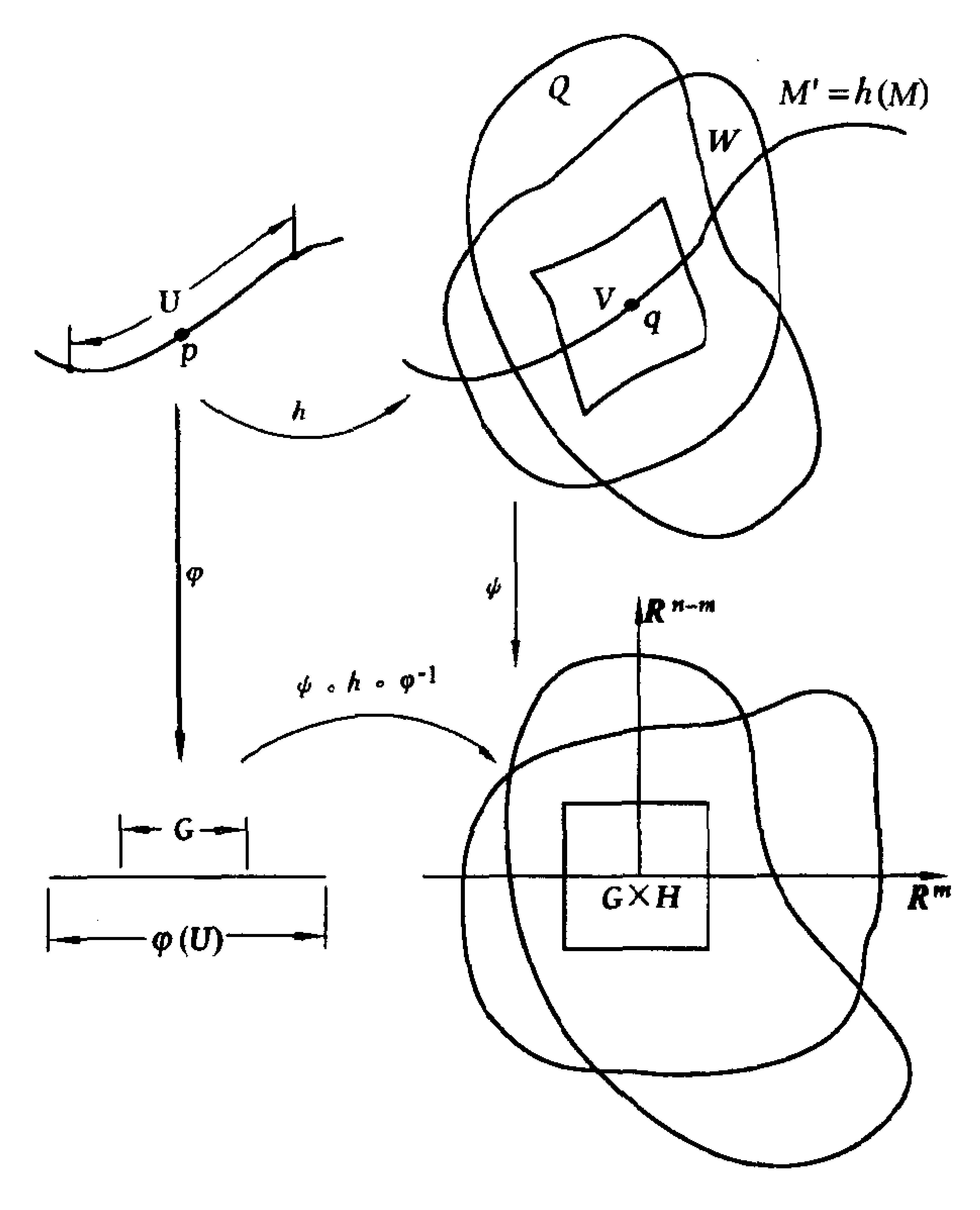


图 6

这证明了 M' 是 N 的正则子流形.

如果对 M 的任意一点 p,存在 p 点的开邻域 U,使得 $h(U)$ 是 M' 中的开集,并且映射

$$h\,\big|\,U: U \to h(U)$$

是 C^r 同胚,那么我们就说 $h: M \to M'$ 是局部 C^r 同胚. 下面就来证明 h 确有此性质(证明涉及的符号如前面约定).

在 p 点邻近,考察局部表示

$$\tilde{h} = \psi \circ h \circ \varphi^{-1}.$$

前面的(3.3)式可写成

(3.7) $$\widetilde{h}(\varphi(p')) = (\varphi(p'),0), \quad \forall p' \in U.$$

而(3.4)式可写成

(3.8) $$\widetilde{h}(\varphi(U)) = \varphi(U) \times 0.$$

映射 $\widetilde{h}: \varphi(U) \to \varphi(U) \times 0 = \psi(h(U))$ 当然是 C^r 同胚. 于是 $h: U \to h(U)$ 是 C^r 同胚. 这里的 p 是 M 的任意一点, U 是 p 点在 M 中的开邻域, $h(U)$ 是 $q=h(p)$ 点在 M' 中的开邻域. 我们验证了 $h: M \to M'$ 是局部 C^r 同胚.

映射 $h: M \to M'$ 既是同胚, 又是局部 C^r 同胚, 当然必定是从 M 到 M' 的 C^r 同胚. □

定理 3.10(Whitney 嵌入定理的另一陈述) 设 M 是 m 维光滑流形, $n \geq 2m+1$, 则存在 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭子集 M', 它是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则光滑子流形, 并且光滑同胚于流形 M.

推论 3.11 任何(满足第二可数公理的) C^∞ 流形 M 都是可距离化的空间, 即可赋予 M 适当的距离函数

$$d: M \times M \to \boldsymbol{R}_+,$$

使得由 d 给出的距离拓扑与 M 的拓扑一致.

附记 3.12 对于 $r \geq 1$, 任何 C^r 流形结构都有与之 C^r 相容的 C^∞ 流形结构. (这就是人们所称的"流形的光滑化", 请参阅本书序言附记所列的主要参考书[2]). 因此, 任何(满足第二可数公理的) C^r 流形($r \geq 1$)都能 C^r 嵌入到 Euclid 空间之中, 作为其 C^r 正则子流形, 并且是一个闭子集.

练　习　C

C.1. 设 M 和 N 是微分流形, $q \in N$. 求证 $M \times \{q\}$ 是乘积流形 $M \times N$ 中的零测集. 特别地, $M \times \{0\}$ 是乘积流形 $L = M \times \boldsymbol{R}^k$ 中的零测集.

C.2. 请完成命题 1.3, 引理 1.5 和引理 1.6 的证明.

下面的练习 C.3～C.5 讨论关于**零测集的 Fubini 定理**.

C. 3. 考察包含于开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之中且覆盖了闭区间$[a,b]$的任一族开区间 $\mathscr{I}$. 求证存在 $\mathscr{I}$ 的有限子族 $\mathscr{I}_0=\{I_1,\cdots,I_r\}$,使得

$$\bigcup_{j=1}^{r} I_j\supset[a,b],\quad \sum_{j=1}^{r}|I_j|<2(b-a+\varepsilon).$$

C. 4. 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧致集,s 是一个实数. 我们约定记

$$E_s=\{(x_1,\cdots,x_n)\in E\,|\,x_1=s\}.$$

如果 U 是 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的开集,使得 $E_s\subset\{s\}\times U$,那么存在含有 s 的适当小的区间 $J\subset\boldsymbol{R}$,使得

$$E_t\subset\{t\}\times U,\quad \forall t\in J.$$

C. 5. (关于**零测集的 Fubini 定理**) 设 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭子集. 如果任何一个 $s\in\boldsymbol{R}$ 都使得 E_s 是$\{s\}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$中的零测集,那么 E 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集.

C. 6. 试证任何距离空间都是紧生成空间.(关于紧生成空间的定义请参看注记 3.4).

C. 7. 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间,Y 是紧生成空间,$f:X\to Y$是常态映射,则 f 是闭映射(即 f 将 X 的任何闭集映成 Y 中的闭集). 如果 f 还是单映射,那么 f 是从 X 到 $f(X)$的同胚映射.

C. 8. 设 X 和 Y 是距离空间,$f:X\to Y$ 是连续映射. 则 f 为常态映射的充分必要条件是:"如果 X 中的序列$\{x_n\}$使得$\{f(x_n)\}$收敛于 Y 中某点,那么$\{x_n\}$必定含有收敛的子序列."

C. 9. 试利用 Whitney 嵌入定理,证明任何光滑流形都可赋予距离使之成为一个完备的距离空间.

第四章　向量丛与管状邻域定理，映射的光滑化与同伦的光滑化

§1　引　　例

首先介绍"同伦"．这是拓扑学中最基本的概念之一．

设 X 和 Y 是拓扑空间，$f_i: X \to Y$ 是连续映射($i=0,1$)，$I=[0,1]$是实数区间．如果存在连续映射 $F: I\times X\to Y$，使得

$$F(0,x) = f_0(x), \quad \forall x\in X,$$

$$F(1,x) = f_1(x), \quad \forall x\in X,$$

那么我们就说 F 是从 f_0 到 f_1 的一个**同伦**．当这样的同伦存在时，我们就说 f_0 **同伦于** f_1，记为

$$f_0 \sim f_1.$$

需要指明具体的同伦时，可写为

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1.$$

容易验证：同伦关系是一种等价关系．

对一般的连续映射作普遍的研究，由于情况错综复杂，往往难以入手．为了从"一团乱麻"中理出头绪，人们试探用某类较易研究的"好"映射去逼近任意的连续映射．有许多情形，所讨论的性质是在同伦变化下保持不变的(这几乎是拓扑学中所研究的主要情形)，自然就要求用来逼近的"好"映射与被逼近的连续映射之间有同伦关系．在组合拓扑学中，常用的"好"映射是"分片线性映射"(即"单纯映射")，因而"单纯逼近定理"是最重要的工具之一．在微分拓扑学中，常选用的"好"映射是"光滑映射"，所以连续映射的光滑逼近也是很重要的技术手段．

我们考虑这样一个问题：设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$f: M\to N$ 是连续映射，能否用光滑映射 $g: M\to N$ 去逼近 f，并且要求用来逼近的光滑映射 g 同伦于 f?

对于 $N=\boldsymbol{R}^n$ 的情形，这问题比较容易解决. 下面就是有关的讨论.

引理 1.1 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集，K 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的紧致子集，$K\subset U$，δ是任意给定的正实数. 则对任意的 $f\in C^0(U,\boldsymbol{R})$，存在 $g\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$，使得

$$|g(x)-f(x)|<\delta,\quad \forall x\in K.$$

证明 对于 $\rho>0$，记

$$K_\rho=\{x\in\boldsymbol{R}^m \mid \exists y\in K:\ \|x-y\|\leqslant\rho\}.$$

则 K_ρ 仍是紧致集，并且只要我们把正数 ρ 选择得足够小，就可使得 $K_\rho\subset U$（取定一个这样的 ρ）. 根据第二章 § 4 的推论 4.6，存在 $\eta\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{R})$使得

$$K_\rho\subset\{x\in\boldsymbol{R}^m \mid \eta(x)=1\}\subset\operatorname{supp}\eta\subset U.$$

我们先将 f 修改扩充为

$$f_0(x)=\begin{cases}\eta(x)f(x), & \forall x\in U,\\ 0, & \forall x\in\boldsymbol{R}^m\setminus U.\end{cases}$$

在第二章 § 4 里，已经知道存在函数 $\omega\in C^\infty(\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{R})$，适合这样的条件

$$\begin{cases}\omega(x)=1, & \forall x\in\overline{B}_1,\\ 0<\omega(x)<1, & \forall x\in B_2\setminus\overline{B}_1,\\ \omega(x)=0, & \forall x\in\boldsymbol{R}^m\setminus B_2,\\ \omega(-x)=\omega(x), & \forall x\in\boldsymbol{R}^m.\end{cases}$$

我们将用这样的 ω 去“磨光”f_0. 为此，先取

$$\varepsilon \in (0, \rho/3), \quad c = \int_{B_3} \omega(u) \mathrm{d}u,$$

然后作积分

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= \frac{1}{c\varepsilon^m} \int_{\boldsymbol{R}^m} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) f_0(y) \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{c} \int_{\boldsymbol{R}^m} \omega(u) f_0(x + \varepsilon u) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{c} \int_{B_3} \omega(u) f_0(x + \varepsilon u) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

易知 $g_\varepsilon \in C^\infty(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R})$，并且对于 $x \in K$ 有

$$\begin{aligned} |g_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{c} \int_{B_3} \omega(u)(f(x + \varepsilon u) - f(x)) \mathrm{d}u \right| \\ &\leqslant \frac{1}{c} \int_{B_3} \omega(u) |f(x + \varepsilon u) - f(x)| \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

由于 f 在紧致集 K_ρ 上的一致连续性，上面不等式右端最后一个积分表示式随着 $\varepsilon \to 0$ 而一致地趋于 0（相对于参数 $x \in K$）。因而，存在充分小的 $\varepsilon > 0$，使得

$$|g_\varepsilon(x) - f(x)| < \delta, \quad \forall x \in K. \qquad \square$$

引理 1.2 设 M 是 C^∞ 流形，G 是 M 的一个开集，(U, φ) 是 M 的一个局部坐标图卡，并且满足条件：$\varphi(U) = B_3$. 我们记 $V = \varphi^{-1}(B_2)$，$W = \varphi^{-1}(B_1)$. 如果 $f: M \to \boldsymbol{R}$ 是一个连续映射，它限制在开集 G 上是光滑的，那么对任意给定的正实数 δ，存在连续映射 $g: M \to \boldsymbol{R}$，满足条件：

(1) $g(p) = f(p)$, $\forall p \in M \backslash V$;

(2) g 限制在开集 $G \cup W$ 上是光滑的；

(3) $|g(p) - f(p)| < \delta$, $\forall p \in M$.

证明 取 $\eta \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$，满足条件：

$$\begin{cases}\eta(p) = 1, & \forall p \in \overline{W}, \\ 0 < \eta(p) < 1, & \forall p \in V \backslash \overline{W}, \\ \eta(p) = 0, & \forall p \in M \backslash V.\end{cases}$$

根据引理 1.1(对于紧致集 $K = \overline{B}_2$ 和开集 B_3),函数 $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1} \in C^0(B_3, \boldsymbol{R})$ 可以用函数 $g_0 \in C^\infty(B_3, \boldsymbol{R})$ 在 $\overline{B}_2$ 上一致逼近:

$$|f \circ \varphi^{-1}(x) - g_0(x)| < \delta, \quad \forall x \in \overline{B}_2.$$

记 $g_1 = g_0 \circ \varphi$,则易知 $g_1 \in C^\infty(U, \boldsymbol{R})$,并且

$$|f(p) - g_1(p)| < \delta, \quad \forall p \in \overline{V}.$$

我们把 f 写成

$$f(p) = (1 - \eta(p))f(p) + \eta(p)f(p),$$

然后定义

$$g(p) = (1 - \eta(p))f(p) + \eta(p)g_1(p).$$

显然 $g: M \to \boldsymbol{R}$ 满足引理所要求的条件(1),(2)和(3). □

引理 1.3 设 M 是光滑流形,$f: M \to \boldsymbol{R}$ 是连续映射,δ 是任意给定的正实数.则存在 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$,使得

$$|g(p) - f(p)| < \delta, \quad \forall p \in M.$$

证明 选取 M 的可数个图卡 (U_i, φ_i) 和开集 $V_i, W_i (i = 1, 2, \cdots)$,适合条件:

(1) $\varphi_i(U_i) = B_3$, $\varphi_i(V_i) = B_2$, $\varphi_i(W_i) = B_1$;

(2) $\mathscr{U} = \{U_i\}$ 是局部有限族;

(3) $\mathscr{W} = \{W_i\}$ 覆盖了 M.

约定记 $$W_0 = \varnothing, \quad f_0 = f.$$

假定 $f_k \in C^0(M, \boldsymbol{R})$ 已定义妥当,它限制在开集

$$G_k = \bigcup_{j=0}^{k} W_j$$

之上是光滑的. 根据引理 1.2,存在 $f_{k+1} \in C^0(M, \boldsymbol{R})$,该 f_{k+1} 限制在开集

$$G_{k+1} = G_k \cup W_{k+1} = \bigcup_{j=0}^{k+1} W_j$$

之上是光滑的,f_{k+1} 限制在 $M \setminus V_{k+1}$ 上等于 f_k,并且

$$|f_{k+1}(p) - f_k(p)| < \frac{\delta}{2^{k+1}}, \quad \forall p \in M.$$

在归纳定义了序列 $\{f_k\}$ 之后,我们取

$$g(p) = \lim_{k \to \infty} f_k(p),$$

则 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$,并且适合条件

$$|g(p) - f(p)| < \delta, \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

我们约定以记号 $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Euclid 范数.

定理 1.4 设 M 是光滑流形,$f: M \to \boldsymbol{R}^n$ 是连续映射,ε 是任意给定的正实数,则存在 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^n)$,使得

$$\|g(p) - f(p)\| < \varepsilon, \quad \forall p \in M,$$

并且 g 同伦于 f.

证明 取 $\delta = \varepsilon / \sqrt{n}$. 对 f 的 n 个分量分别引用引理 1.3 就得到本定理结论前一部分的证明. 然后定义

$$F(t,p) = (1-t)g(p) + tf(p), \quad \forall (t,p) \in I \times M.$$

则易验证:F 是从 g 到 f 的同伦. 这完成了定理结论后一部分的证明. $\square$

约定以 S^n 表示标准的 n 维球面,即约定

$$S^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\},$$

其中的 $\|\cdot\|$ 表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的 Euclid 范数. 对于 M 是光滑流形,

$N=S^n$的情形，再来考虑前面提出的关于连续映射 $f: M\to N$ 的光滑化问题.

因为 S^n 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的子流形，任何连续映射 $f: M\to S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$ 当然可以看成是到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的连续映射. 于是，对于任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，存在 $g_1\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^{n+1})$，使得

$$\|g_1(p)-f(p)\|<\varepsilon/2<1/2,$$

并且从 $I\times M$ 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的映射

$$F_1(t,p)=(1-t)g_1(p)+tf(p),\quad (t,p)\in I\times M$$

是从 g_1 到 f 的同伦. 为使所得到的光滑逼近是从 M 映到 S^n 的，我们设法将 $g_1(p)$投射到 S^n 上去.

对于任意 $y\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$，可以定义

$$\pi(y)=y/\|y\|.$$

显然 $\pi: \boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}\to S^n$ 是一个光滑映射. 如果记

$$g=\pi\circ g_1,\quad F=\pi\circ F_1,$$

那么 g 是从 M 到 S^n 的光滑映射，F 是从 $I\times M$ 到 S^n 的连续映射.

我们来验证

$$\|g(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M.$$

首先注意到：对于 $v\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$和 $w\in S^n$ 有

$$(v,w)\leqslant\|v\|\cdot\|w\|=\|v\|=\left(v,\frac{v}{\|v\|}\right).$$

$$\begin{aligned}\left\|v-\frac{v}{\|v\|}\right\|^2&=\|v\|^2+1-2\left(v,\frac{v}{\|v\|}\right)\\&\leqslant\|v\|^2+1-2(v,w)\\&=\|v-w\|^2.\end{aligned}$$

因而

$$\left\|\frac{v}{\|v\|}-w\right\|\leqslant\left\|\frac{v}{\|v\|}-v\right\|+\|v-w\|$$

$$\leqslant 2\|v-w\|.$$

对 $v=g_1(p)$ 和 $w=f(p)$ 运用所推导的不等式就得到

$$\|g(p)-f(p)\|\leqslant 2\|g_1(p)-f(p)\|<\varepsilon,\quad \forall p\in M.$$

还容易验证，F 是从 g 到 f 的同伦：

$$\left.\begin{aligned}F(0,p)&=\pi\circ F_1(0,p)=\pi\circ g_1(p)=g(p),\\ F(1,p)&=\pi\circ F_1(1,p)=\pi\circ f(p)=f(p),\end{aligned}\right\}\quad \forall p\in M.$$

在上面的讨论中，对于 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的子流形 S^n，我们在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中确定了 S^n 的一个开邻域

$$\Omega=\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}\supset S^n$$

并定义了一个光滑的投射

$$\pi:\Omega\rightarrow S^n.$$

借助于这样的技术手段，顺利地解决了从 M 到 S^n 的映射的光滑化问题——这只是一般的“管状邻域”技术的一个最简单的例子.

对于一般的 n 维光滑流形 N，我们可以先将 N 嵌入到 $\boldsymbol{R}^{2n-1}$ 中去. 如果能够在 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中确定 N 的一个适当的开邻域 Ω，并且确定适当的光滑投射

$$\pi:\Omega\rightarrow N,$$

那么也就能仿照刚才的做法，顺利解决从 M 到 N 的映射的光滑化问题.

为了解决映射的光滑化问题，将利用“管状邻域”技术. 在证明“管状邻域定理”之前，先要介绍关于向量丛的一些最基本的概念与知识.

§2 向量丛的概念

在一点邻近作映射的线性近似是微分学的一种基本技术

手段. 像微分流形这样的"弯曲的空间",本身并不具有线性结构. 对许多情形,我们有必要给微分流形的每一点配上一个适当的线性空间(例如: 切空间). 向量丛概念的基本思想源出于此. 为了从不同的角度考察这一概念,我们将介绍向量丛的三种(相互等价的)定义方式.

定义 2.1(向量丛的第一种定义方式) 设 E 和 X 是 C^r 流形(对 $r=0$ 的情形,可以允许 E 和 X 只是 Hausdorff 拓扑空间),$\pi: E\to X$ 是 C^r 满映射,$\boldsymbol{R}^k$ 是通常的 k 维实空间. 若以下的条件(0)和(1)得以满足,则称$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$为 k 维 C^r **实向量丛**,并称 E 为(向量丛的)**全空间**,X 为**底空间**,π 为**投影**,$\boldsymbol{R}^k$ 为**纤维型**. 条件(0)和(1)是:

(0) 对任意 $x\in X$,集合 $E_x=\pi^{-1}(x)$赋有 k 维实系数向量空间结构(通常称 E_x 为 x 点上的纤维);

(1) 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$,并且对每一个开集 $U\in\mathscr{U}$,存在 C^r 同胚

$$h=h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\boldsymbol{R}^k,$$

U 是底空间的开子集,这里要求

(1.a) $p_1\circ h=\pi$, 即下面的图表(图 7)可交换(这里的 p_1 是从乘积 $U\times\boldsymbol{R}^k$ 到第一个因子 U 的投影);

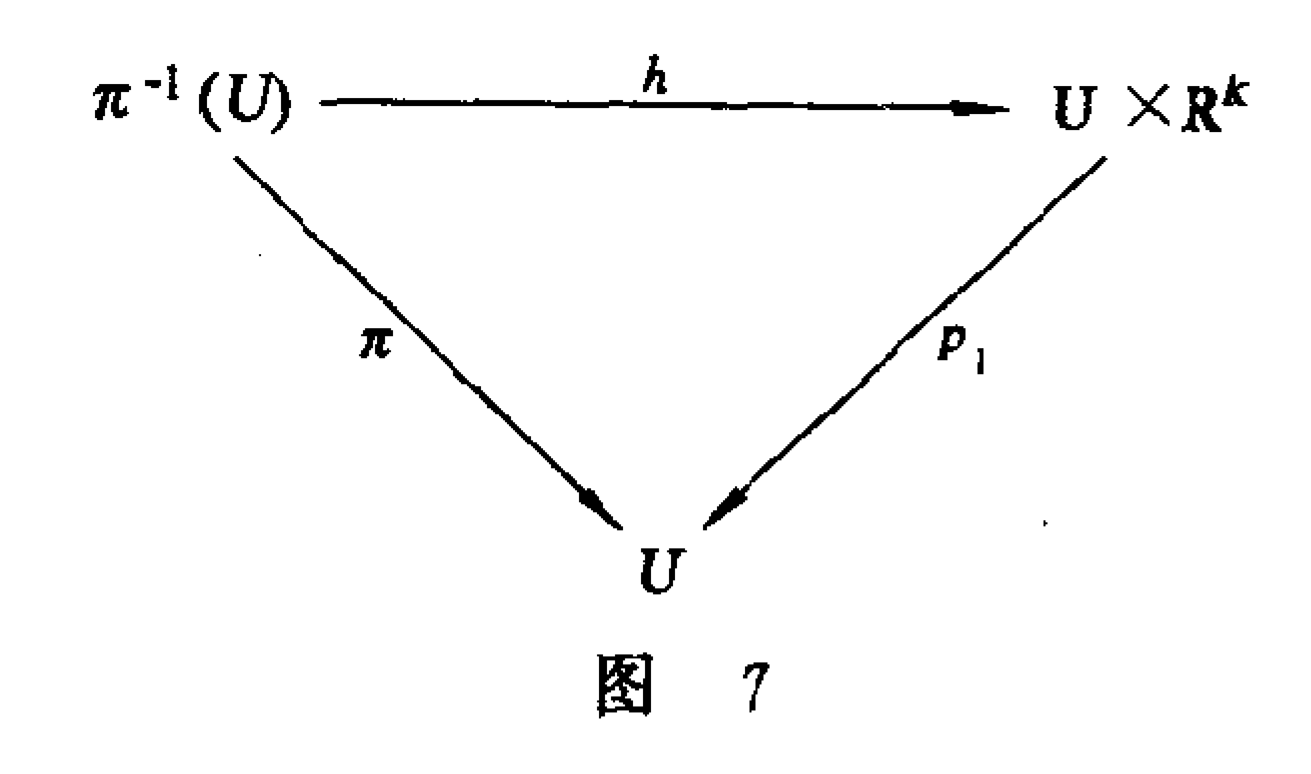


图 7

(1.b) 对任意的 $x\in U$,映射

$$h|\pi^{-1}(x):\pi^{-1}(x)\to\{x\}\times\boldsymbol{R}^k$$

是向量空间之间的同构.

在上面的定义中,开集 $U\in\mathscr{U}$ 被称为**局部平凡域**,同胚 h 被称为**局部平凡化**.

在不至于引起混淆的情况下,有时也简单地称"E 是一个 k 维 C^r 实向量丛".

我们约定以 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$表示所有的非退化 $k\times k$ 实数方阵组成的集合. $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$可以看成是空间 $\boldsymbol{R}^{k^2}$ 的开子集,因而赋有 C^∞ 微分结构.

定义 2.2(向量丛的第二种定义方式) 设 X 是 C^r 流形($r=0$的情形允许 X 仅是 Hausdorff 拓扑空间),并设

(0) 对任意的 $x\in X$,有一个确定的 k 维实系数向量空间 E_x 与之对应,于是,我们可以构作

$$E=\coprod_{x\in X}E_x \quad \Big(\coprod\text{表示"不交并"}\Big),$$

而且可以定义这样一个映射 $\pi: E\to X$,

$$\pi(\xi)=x,\quad \forall\,\xi\in E_x;$$

(1) 存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$,使得对于任意一个 $U\in\mathscr{U}$,有一个确定的标架场

$$e_U(x)=(e_{U,1}(x),\cdots,e_{U,k}(x))$$

与之对应,这里的 $e_U(x)$对每个 $x\in U$ 都是 E_x 中的基底(即"标架"),于是,当 $U,V\in\mathscr{U}$, $U\cap V\neq\varnothing$时,在交集 $U\cap V$ 上定义了两组标架 $e_U(x)$和 $e_V(x)$,因而可设

$$e_U(x)=e_V(x)A_{VU}(x),$$

这里的 $A_{VU}(x)$是 $k\times k$ 非退化实数方阵;

(2) 映射

$$A_{VU}: U\cap V\to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$$

是 C^r 的.

当条件(0),(1)和(2)得以满足时,我们就把$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$叫做$k$维$C^k$ **实向量丛**.

在上面给出的定义中,局部标架场$e_U(x)$与$e_V(x)$之间的变换$A_{VU}(x)$满足条件(2).我们把这样两个标架场称为是C^r相容的.

定义 2.3(向量丛的第三种定义方式) 设E是一个集合,X是一个C^r流形($r=0$情形允许X只是Hausdorff拓扑空间),$\pi: E\to X$是满映射,$\boldsymbol{R}^k$是k维实空间.如果下面的条件(1.a),(1.b)和(2)得以满足,那么我们就把$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$叫做$C^r$向量丛.

(1.a) 存在X的开覆盖$\mathscr{U}$,并且对每一个$U\in\mathscr{U}$存在确定的单满映射(一一对应)

$$h=h_U: \pi^{-1}(U)\to U\times\boldsymbol{R}^k,$$

使得以下图表可交换(图8).

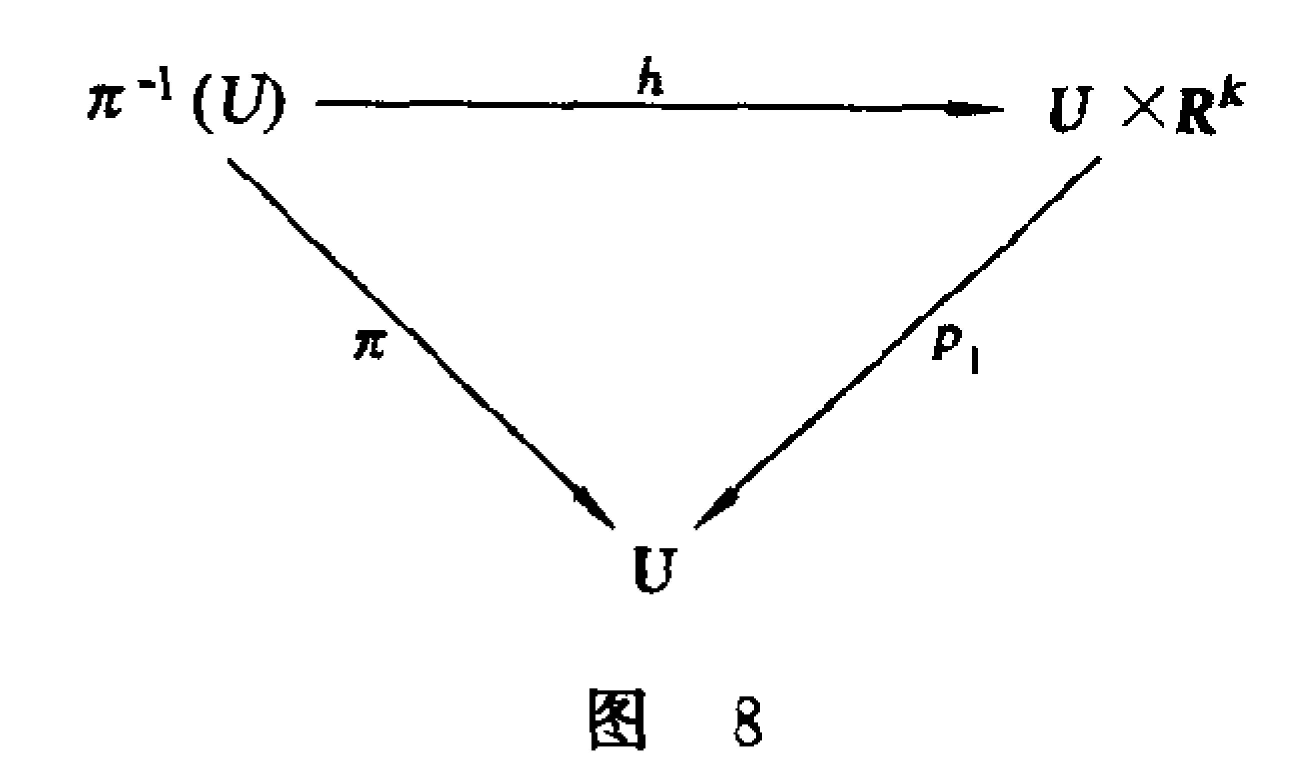


图 8

(1.b) 若$U,V\in\mathscr{U}$并且$U\cap V\neq\varnothing$,则$h_V\circ h_U^{-1}$表示为

$$h_V\circ h_U^{-1}: (U\cap V)\times\boldsymbol{R}^k\to(U\cap V)\times\boldsymbol{R}^k$$

$$(x,u)\mapsto(x,A_{VU}(x)u),$$

其中的$A_{VU}(x)\in\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$;

(2) 若$U,V\in\mathscr{U}$, $U\cap V\neq\varnothing$,则

$$A_{VU}: U\cap V\to\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$$

是 C^r 映射.

定理 2.4 定义 2.1,定义 2.2 和定义 2.3 相互等价.

证明 约定用记号 I,II 和 III 分别代表定义 2.1,定义 2.2 和定义 2.3. 并约定以"I $\Longrightarrow$ II"这样的记号表示"定义 2.1 意义下的向量丛也是定义 2.2 意义下的向量丛"(余类推). 我们将证明

$$\text{"I} \Longrightarrow \text{II} \Longrightarrow \text{III} \Longrightarrow \text{I"}.$$

首先证明"I $\Longrightarrow$ II". 设 $\delta_1, \cdots, \delta_k$ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的标准基底,即设

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \vdots \\ \delta_{ki} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ji} = \begin{cases} 1, \text{若 } j = i, \\ 0, \text{若 } j \neq i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \cdots, k.$$

我们取

$$e_{U,i}(x) = h_U^{-1}(x, \delta_i), \quad i = 1, \cdots, k,$$
$$e_U(x) = (e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k}(x)).$$

然后验证这样建立的局部标架场满足定义 2.2 的要求. 对于 $U \cap V \neq \varnothing$,考察两个 C^r 映射

$$h_U : \pi^{-1}(U \cap V) \to (U \cap V) \times \boldsymbol{R}^k,$$
$$h_V : \pi^{-1}(U \cap V) \to (U \cap V) \times \boldsymbol{R}^k.$$

这两个映射限制到每一纤维之上都是线性同构. 因此 $h_U^{-1} \circ h_V$ 在 $\pi^{-1}(U \cap V)$ 的每一纤维上也是线性同构. 我们写出

$$\begin{aligned} e_U(x) &= h_U^{-1}(x, \delta) \\ &= h_U^{-1} \circ h_V(e_V(x)) \\ &= e_V(x) A_{VU}(x). \end{aligned}$$

这里的 $A_{VU}(\cdot)$ 是由 $h_U^{-1} \circ h_V$ 决定的,因而

$$A_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$$

是 C^r 映射.

其次证明"Ⅱ⟹Ⅲ". 对于定义 2.2 意义下的向量丛 $(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$,显然有

$$\pi^{-1}(U)=\coprod_{x\in U}E_x.$$

我们构作"一一对应"映射 $h_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\boldsymbol{R}^k$,规定:若

$$\xi\in E_x,\quad \xi=\sum_{i=1}^{k}u^i e_{U,i}(x),$$

则

$$h_U(\xi)=(x,u),\quad u=\begin{bmatrix}u^1\\ \vdots\\ u^k\end{bmatrix}.$$

这样定义的 h_U,其逆映射为

$$h_U^{-1}(x,u)=\sum_{i=1}^{k}u^i e_{U,i}(x).$$

显然对于 $U\cap V\neq\varnothing$ 的情形有

$$h_V\circ h_U^{-1}(x,u)=(x,A_{VU}(x)u),$$

并且

$$A_{VU}:U\cap V\to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$$

是 C^r 映射.

最后证明"Ⅲ⟹Ⅰ". 对于 $x\in U$,我们借助于一一对应 h_U^{-1} 将 $\{x\}\times\boldsymbol{R}^k$ 的线性结构搬过来作为 $E_x=\pi^{-1}(x)$ 的线性结构. 由于定义 2.3 中的条件,用这种方式定义的 E_x 的线性结构不依赖于 $U\in\mathscr{U}$ 的具体选择(只要求 $x\in U$). 我们还将利用各个 h_U^{-1} 把 $U\times\boldsymbol{R}^k$ 的拓扑结构搬过来,作成 E 的拓扑结构. 并将证明赋有这种拓扑的空间 E 具有 C^r 微分结构.

我们规定:E 的子集 D 称为开集,当且仅当对任何 $U\in\mathscr{U}$,集合 $h_U(D\cap\pi^{-1}(U))$ 是 $U\times\boldsymbol{R}^k$ 中的开集. 用这种方式赋予 E 以拓扑结构,容易看出:E 是一个 Hausdorff 拓扑空间

(因为 X 本身是 Hausdorff 空间). 这样定义的拓扑使得 $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^k$ 成为同胚映射.

因为 $h_V \circ h_U^{-1}(x,u) = (x, A_{VU}(x)u)$，其中

$$A_{VU}: U \cap V \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$$

是 C^r 映射，所以

$$h_V \circ h_U^{-1}: (U \cap V) \times \boldsymbol{R}^k \to (U \cap V) \times \boldsymbol{R}^k$$

也是 C^r 映射. 借助于各个同胚 $h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^k$，我们可以赋予 E 以确定的 C^r 微分结构. 对这样建立的 C^r 微分结构，容易验证

$$\pi: E \to X$$

是 C^r 映射，并且

$$h_U: \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^k$$

是 C^r 同胚. □

注记 2.5 虽然在定义 2.2 和定义 2.3 中没有以一目了然的方式指出全空间 E 是拓扑空间和 C^r 流形，但如定理 2.4 证明中所述，我们可以赋予 E 以明确的拓扑结构和 C^r 微分结构.

定义 2.6 设 $(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$ 是 C^r 向量丛. 如果 C^r 映射 $\sigma: X \to E$ 满足这样的条件

$$\pi \circ \sigma(x) = x, \quad \forall x \in X$$

(也就是 $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x) = E_x$, $\forall x \in X$)，那么我们就说 σ 是向量丛 E 的一个 C^r **截面**.

例 2.7 设 M 是 C^r 流形，$\dim M = m$. 在第一章 §5 中，对每一点 $p \in M$ 定义了 M 在 p 点的切空间 T_pM. 如果记

$$TM = \coprod_{p \in M} T_pM,$$

并且定义

$$\pi: TM \to M, \quad \pi(\xi) = p, \quad \forall \xi \in T_pM,$$

那么用定义 2.2 很容易判明：$(TM, M, \pi, \boldsymbol{R}^m)$是一个 C^{r-1} 向量丛. 我们把这向量丛称做 M 的**切丛**. 通常人们把切丛的截面叫做**向量场**.

例 2.8 设 X 是 C^r 流形($r=0$ 的情形允许 X 只是 Hausdorff 拓扑空间). 我们记 $E=X\times\boldsymbol{R}^k$ 并定义

$$\pi: E = X \times \boldsymbol{R}^k \to X,$$
$$(x,u) \to x.$$

显然$(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$是 C^r 向量丛，这最简单的向量丛被称为**平凡丛**. 平凡丛的截面 σ 具有这样的形式：

$$\sigma(x) = (x, f(x)), \quad \forall x \in X,$$

其中的 f 是从 X 到 $\boldsymbol{R}^k$ 的映射.

注记 2.9 C^r 向量丛概念的核心是：相应于底空间某个开覆盖的一族局部平凡化和不同的局部平凡化之间的 C^r 相容性. 本节中以三种方式介绍的向量丛定义，形式上都与适当的开覆盖 $\mathscr{U}$ 的选取有关. 这样定义的对象在许多文献中被称为(相应于开覆盖 $\mathscr{U}$ 的)“坐标丛”. 更精细的定义还应把表面上依赖于不同的开覆盖实质上却无差别的那些“形异实同”的“坐标丛”等同起来，当作同一个向量丛. 对此，我们不打算作全面细致的讨论，仅仅以定义 2.3 为例作一个简要的说明.

约定将定义 2.3 所述的对象称为“C^r **坐标丛**”，它由全空间 E，底空间 X，投影 $\pi: E\to X$，X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 和相应于每个 $U\in\mathscr{U}$ 的确定的单满映射(局部平凡化)

$$h = h_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^k$$

组成. 这样的坐标丛应记为

$$(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k, \mathscr{U}, \mathscr{H}),$$

其中 $\mathscr{H}=\{h_U \mid U\in\mathscr{U}\}$的成员是上面所说的那些局部平凡化.

两个这样的 C^r 坐标丛

$$(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k, \mathscr{U}, \mathscr{H}) \quad 和 \quad (E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k, \mathscr{V}, \mathscr{G})$$

被称为是 C^r 相容的，倘若

$$(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k, \mathscr{U} \cup \mathscr{V}, \mathscr{H} \cup \mathscr{G})$$

仍是一个 C^r 坐标丛. 容易验证：C^r 坐标丛之间的这种 C^r 相容关系是一种等价关系. 以 E 为全空间，X 为底空间，π 为投影，$\boldsymbol{R}^k$ 为纤维型的所有的 C^r 坐标丛，按照 C^r 相容关系分成的每一个等价类被称为是一个 C^r 向量丛.

有了这个注记的说明，我们以后运用向量丛概念时可以更灵活地选取局部平凡域 U 和相应的局部平凡化 $h=h_U$.

§3 子丛，Riemann 度量，正交补丛

定义 3.1 设 $(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$ 是一个 C^r 向量丛. 我们称 $E_1 \subset E$ 是 E 的 k_1 维子向量丛，倘若对任意的 $x_0 \in X$，存在 x_0 在 X 中的开邻域 U 和 E 的 C^r 局部平凡化 $h: \pi^{-1}(U) \to U \times \boldsymbol{R}^k$ 使得

$$h(\pi^{-1}(U) \cap E_1) = U \times (\boldsymbol{R}^{k_1} \times \{0\}).$$

命题 3.2 设 $(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$ 是 C^r 向量丛. 为使 $E_1 \subset E$ 是 E 的 k_1 维子向量丛，必须而且只须：对任意的 $x_0 \in X$，存在 x_0 在 X 中的开邻域 U 和定义在 U 上的 E 的 C^r 标架场

$$e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k_1}(x),\ e_{U,k_1+1}(x), \cdots, e_{U,k}(x),$$

使得 $(E_1)_x = \pi^{-1}(x) \cap E_1$ 是由 $e_{U,1}(x), \cdots, e_{U,k_1}(x)$ 生成的 $E_x = \pi^{-1}(x)$ 的线性子空间 $(\forall\, x \in U)$.

证明 留给读者作为练习. □

定义 3.3 设 $(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$ 和 $(F, X, \rho, \boldsymbol{R}^l)$ 是同一底空间 X 上的两个 C^r 向量丛，则可赋予

$$E \oplus F = \coprod_{x \in X} (E_x \oplus F_x)$$

确定的 $k+l$ 维 C^r 实向量丛结构(仍以 X 为底空间). 我们称这向量丛为 E 与 F 的**直和**(又称 Whitney 和).

定义 3.4 设$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$是 C^r 实向量丛. 若 $\beta: E\oplus E\to \boldsymbol{R}$ 是 C^r 映射,它限制在每一纤维 $E_x\oplus E_x$ 上是空间 E_x 的内积(即对称,双线性,正定的实函数),则称 β 为向量丛 E 的 **C^r-Riemann 度量**.

在不至于引起混淆的情况下,人们常常使用简单的记号$\langle\xi,\eta\rangle$代替 $\beta(\xi,\eta)$.

定理 3.5 设 X 是(满足第二可数公理的) C^r 流形,则以 X 为底空间的任何 C^r 向量丛 E 都具有 C^r-Riemann 度量.

证明 利用适当的单位分解,可以把各个局部平凡表示的 Euclid 内积粘合成为 E 的一个 Riemann 度量.(细节的验证留给读者作为练习.) □

定理 3.6 设 C^r 向量丛$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$赋有确定的 C^r-Riemann 度量,F 是 E 的子向量丛,$F_x=\pi^{-1}(x)\cap F$,并设 $F_x^\perp$ 是F_x 在 E_x 中关于给定的 Riemann 度量的正交补空间. 如果记

$$F^\perp=\coprod_{x\in X}F_x^\perp,$$

那么 $F^\perp$是 E 的子向量丛,并且

$$E=F\oplus F^\perp.$$

证明 取 E 的局部平凡化 $h: \pi^{-1}(U)\to U\times\boldsymbol{R}^k$,使得

$$h(\pi^{-1}(U)\cap F)=U\times(\boldsymbol{R}^m\times\{0\}).$$

由 h 决定了 E 在 U 上的一个标架场

$$s_i(x)=h^{-1}(x,\delta_i),\quad i=1,\cdots,k,$$

其中前 m 个向量生成 $F_x(\forall\, x\in U)$. 用 Gram-Schmidt 手续将标架场

$$(3.1)\qquad s_1(x),\cdots,s_m(x),\cdots,s_k(x)$$

正交化,得到规范正交标架场

(3.2) $\sigma_1(x),\cdots,\sigma_m(x),\cdots,\sigma_k(x)$,

其中的前 m 个向量仍生成 $F_x(\forall x\in U)$，而后 $k-m$ 个向量则生成 $F_x^{\perp}(\forall x\in U)$.

因为标架场(3.1)与(3.2)之间的变换是 C^r 的，所以标架场(3.2)与原来的各个局部标架场 C^r 相容. 用(3.2)作出 E 的局部平凡化，则可看出：$F^{\perp}$ 是 E 的子向量丛，并且

$$E=F\oplus F^{\perp}. \qquad \square$$

定理 3.7 设 M 是 N 的 C^r 子流形，则 TM 是 T_MN 的 C^{r-1} 子向量丛.

证明 在任意的 $p\in M$ 邻近，取 N 的关于 M 正则的局部坐标图卡 (V,ψ). 对这局部坐标，T_VN 具有标架场

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_m},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_n},$$

而 $T_{M\cap V}M$ 则由

$$\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_m}$$

所生成. $\square$

注记 3.8 设 M 是 N 的 C^∞ 子流形，β 是 TN 的 C^∞-Riemann度量，则 β 限制在 TM 上也是 TM 的 Riemann 度量. 因为任何光滑流形 M 都可作为适当的 $\boldsymbol{R}^k$ 的子流形($k\geqslant 2\dim M+1$)，所以平凡丛 $T\boldsymbol{R}^k=\boldsymbol{R}^k\times\boldsymbol{R}^k$ 纤维上的 Euclid 内积在 TM 上诱导了一个 Riemann 度量. 这用另一种办法证明了切从的 Riemann 度量的存在性.

§4 管状邻域定理证明的准备

设 Y 是拓扑空间，B 是 Y 的子空间. 如果连续映射

$r: Y \to B$ 满足条件

$$r(b) = b, \quad \forall b \in B,$$

那么我们就称 B 为 Y 的**收缩核**,并称 r 为(从 Y 到 B 的)**收缩映射**.

设$(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$是一个 C^r 向量丛. 约定以 0_x 表示向量空间 $E_x = \pi^{-1}(x)$中的零向量,我们来考察这样一个截面:

$$\zeta(x) = 0_x, \quad \forall x \in X.$$

这样定义的截面被称为向量丛 E 的**零截面**. 零截面显然是 C^r 的. 约定记

$$X_0 = \zeta(X) = \{0_x \mid x \in X\}.$$

在不至于混淆的时候,人们也常马马虎虎地把零截面的像集 X_0 叫做"零截面". 对于 E 是 C^r 向量丛的情形,X_0 是 E 的 C^r 子流形,因为在局部平凡表示下有

$$h(\pi^{-1}(U) \cap X_0) = U \times 0.$$

因为存在互逆的 C^r 映射 $\pi|X_0 : X_0 \to X$ 和 $\zeta : X \to X_0$,所以零截面子流形 X_0 实际上 C^r 微分同胚于 X.

我们看到,映射 $\zeta : X \to X_0 \subset E$ 实际上将 X 嵌入到 E 中作为正则子流形. 因为这个缘故,人们常常将 X_0 与 X 等同视之.

E 作为 X_0 的开邻域具有非常好的性质:存在 C^r 收缩映射

$$r = \zeta \circ \pi : E \to X_0.$$

下面将要介绍的"管状邻域",正是以这种情形作为模式的.

为了证明"管状邻域定理",需要做一些准备. 先从一个简单的引理开始.

引理 4.1 设 X 和 Y 是拓扑空间,$\psi : X \to Y$ 是连续映射,S 是 X 的闭子集,$\psi|S$ 是单映射,并设 $T = \psi(S)$. 如果对 X 的任何闭子集 F,相应的 $\psi(F \cap S)$都是 Y 的闭子集,那么

$$\psi|S : S \to T$$

是同胚映射.

证明 已经知道 $\psi|S : S\to T$ 是单,满,连续映射. 为了证明 $\psi|S : S\to T$ 是同胚,只须证明 $\psi|S : S\to T$ 是闭映射.

事实上,设 F 是 X 的任意一个闭子集. 根据引理的条件, $\psi(F\cap S)$是 Y 的闭子集. 因为

$$\psi(F\cap S) \subset \psi(S) = T,$$

所以

$$\psi(F\cap S) = \psi(F\cap S)\cap T.$$

由此可知 $\psi(F\cap S)$是 T 的闭子集. 我们证明了 $\psi|S : S\to T$ 是闭映射,因而是同胚. □

引理 4.2 将在以后的讨论中起关键作用.

引理 4.2 设 X 和 Y 是距离空间,X 具有局部紧性质并且满足第二可数公理,A 是 X 的闭子集. 设连续映射 $\psi : X\to Y$ 满足以下两条件:

(1) $\psi: X\to Y$ 是局部同胚映射(即对任意的 $x_0\in X$,映射 ψ 将 x_0 点在 X 中的某个开邻域 U 同胚地映射成 $\psi(x_0)$点在 Y 中的开邻域 $V=\psi(U)$);

(2) $B=\psi(A)$是 Y 的闭子集,并且 $\psi|A : A\to B$ 是同胚映射.

则存在 A 在 X 中的开邻域 G(即包含 A 的开集 G)和 $B=\psi(A)$ 在 Y 中的开邻域 H(即包含 B 的开集 H),使得 $\psi(G)=H$,并且 $\psi|G : G\to H$ 是同胚.

证明 约定将 X 空间的距离函数记为 d. 对于 $\delta>0$ 和 $C\subset X$,我们约定记

$$D(C,\delta) := \{x\in X \mid d(x,C) < \delta\}.$$

以下分步骤(a),(b),(c),(d)证明引理的结论.

(a) 先设 A 是紧致集. 将用反证法确认:存在 A 在 X 中的

开邻域 G，使得 $\psi|G$ 是单映射.

假如不是这样，则对任何 $n\in N$，在开集 $D\left(A,\frac{1}{n}\right)$ 之中，必有 p_n 和 q_n，使得

$$p_n\neq q_n,\quad \psi(p_n)=\psi(q_n).$$

因为 $p_n,q_n\in D\left(A,\frac{1}{n}\right)$，所以存在 p'_n，$q'_n\in A$，满足不等式

$$d(p_n,p'_n)<\frac{1}{n},\quad d(q_n,q'_n)<\frac{1}{n}.$$

因为 A 是紧致集，所以必定存在 $\{p'_n\}$ 和 $\{q'_n\}$ 的子序列 $\{p'_{n_k}\}$ 和 $\{q'_{n_k}\}$，分别收敛于 $p_0\in A$ 和 $q_0\in A$，即

$$p'_{n_k}\to p_0,\quad q'_{n_k}\to q_0.$$

于是也有

$$p_{n_k}\to p_0,\quad q_{n_k}\to q_0.$$

因为 $\psi(p_{n_k})=\psi(q_{n_k})$，所以

$$\psi(p_0)=\psi(q_0).$$

但 $p_0,q_0\in A$，并且 $\psi|A$ 是单映射，所以

$$p_0=q_0.$$

根据条件(1)，存在 $p_0=q_0$ 的开邻域 U，使得 $\psi|U$ 是单映射. 然而，对于充分大的 k，点 p_{n_k} 和 q_{n_k} 都将进入 U. 因为 $\psi(p_{n_k})=\psi(q_{n_k})$，所以在 U 中必有 $p_{n_k}=q_{n_k}$. 这与前面所设矛盾.

(b) 对于 A 的一般情形，设 A_0 是 A 的一个紧致子集. 根据(a)中的讨论，存在 A_0 在 X 中的开邻域 G_*，使得 $\psi|G_*$ 是单映射.

由于 X 是局部紧空间，必要时适当缩小 G_*，不妨设 $\overline{G}_*$ 是紧致集. 下面将进一步证明：存在 A_0 在 X 中的开邻域 G_0，

$$G_0\subset\overline{G}_0\subset G_*$$

（因而 $\overline{G}_0$ 也是紧致集），使得 $\psi|(\overline{G}_0\cup A)$ 也是单映射，$\psi(\overline{G}_0\cup A)$ 是 Y 的闭子集，并且 $\psi|(\overline{G}_0\cup A)$ 是从 $\overline{G}_0\cup A$ 到 $\psi(\overline{G}_0\cup A)$ 的同胚映射.

先取 $n_0\in N$，使得

$$n\in N,\quad n\geqslant n_0 \Longrightarrow D\left(A_0,\frac{1}{n}\right)\subset G_*.$$

只须证明：存在 $n\geqslant n_0$，使得

$$\psi\Big|\left(D\left(A_0,\frac{1}{n}\right)\cup A\right)$$

是单映射. 进而可证明

$$G_0=D\left(A_0,\frac{1}{2n}\right)$$

满足所述的全部要求.

关于存在 $n\geqslant n_0$ 使得 $\psi\Big|\left(D\left(A_0,\frac{1}{n}\right)\cup A\right)$ 是单映射的论证，仍采用反证法. 假设所述的 n 不存在，则对任何 $n\geqslant n_0$，都有

$$p_n,\ q_n\in D\left(A_0,\frac{1}{n}\right)\cup A,$$

使得

$$p_n\neq q_n,\quad \psi(p_n)=\psi(q_n).$$

因为 $\psi|G_*$ 和 $\psi|A$ 都是单映射，所以 p_n 和 q_n 既不能同属于 G_*，也不能同属于 A. 不妨设

$$p_n\in D\left(A_0,\frac{1}{n}\right)\Big\backslash A,\quad q_n\in A\backslash G_*.$$

对于这样的 p_n，存在 $p'_n\in A_0$，使得

$$d(p_n,p'_n)<\frac{1}{n}.$$

因为 A_0 是紧致集，所以存在 $\{p'_n\}$ 的子序列 $\{p'_{n_k}\}$，使得

$$p'_{n_k} \to p \in A_0,$$

于是也有

$$p_{n_k} \to p \in A_0.$$

因为

$$\psi(q_{n_k}) = \psi(p_{n_k}), \qquad \psi(p_{n_k}) \to \psi(p) \in B,$$

所以

$$\psi(q_{n_k}) \to \psi(p) \in B.$$

因为

$$q_{n_k} \in A, \quad \psi(q_{n_k}) \in \psi(A) = B,$$

$$\psi(q_{n_k}) \to \psi(p) \in B,$$

并且 $\psi|A$ 是从 A 到 B 的同胚映射，所以

$$q_{n_k} \to p \in A_0 \subset G_* .$$

对充分大的 k，相应的 q_{n_k} 将进入开集 G_*（参看图 9），但这与 $\{q_n\} \subset A \backslash G_*$ 相矛盾. 至此，我们证明了：对某个自然数 $n \geqslant n_0$，

$$\psi \Big| \left(D\left(A_0, \frac{1}{n} \right) \cup A \right)$$

是单映射.

对于所确定的 $n \geqslant n_0$，我们记

$$G_0 = D\left(A_0, \frac{1}{2n} \right).$$

于是

$$G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_* .$$

因为 $\overline{G}_*$ 是紧致集，所以 $\overline{G}_0$ 也是紧致集. 又因为 $\psi(A) = B$ 是 Y 的闭子集，所以

$$\psi(\overline{G}_0 \cup A) = \psi(\overline{G}_0) \cup \psi(A)$$

也是 Y 的闭子集. 因为

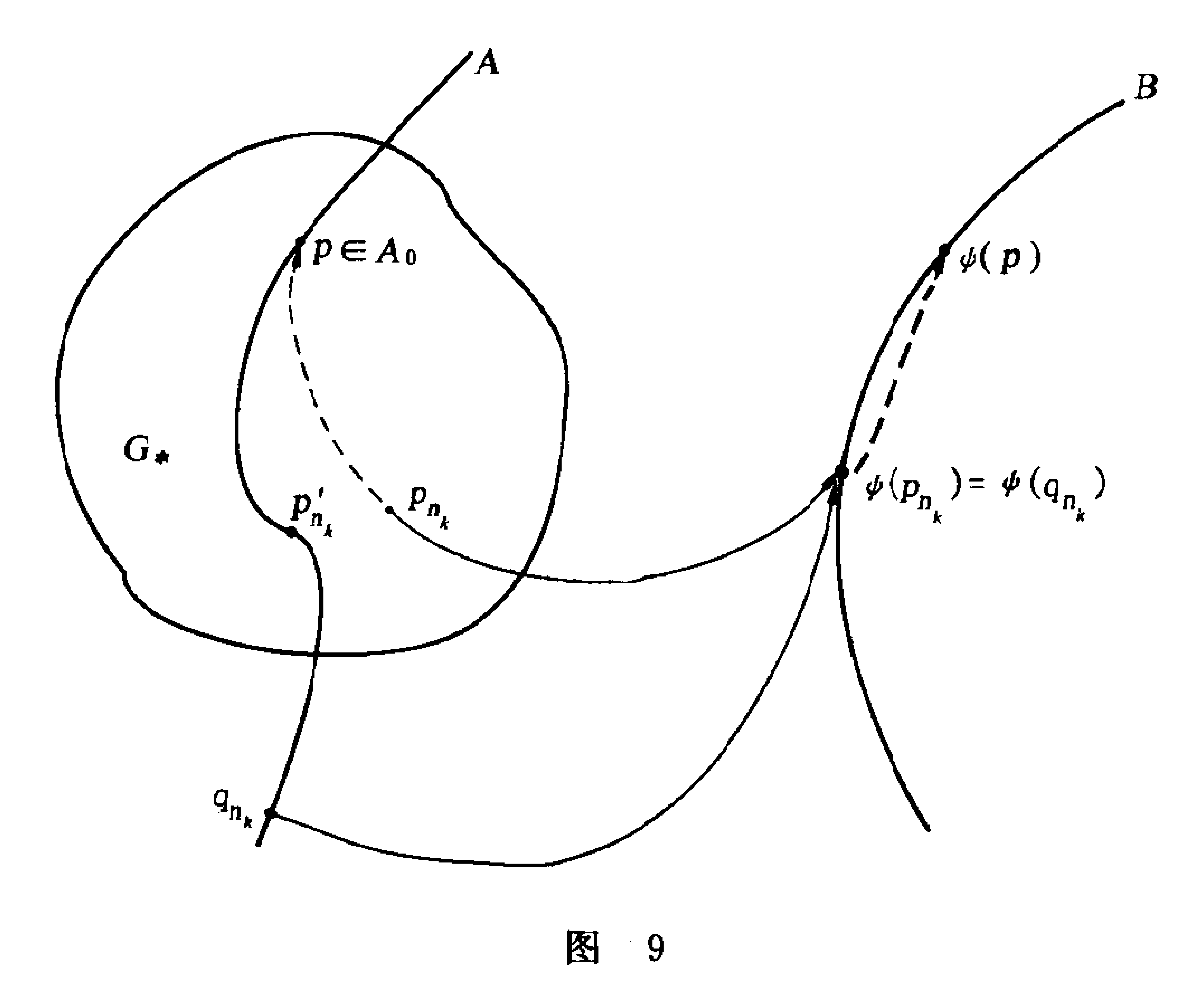


图 9

$$G_0 = D\left(A_0, \frac{1}{2n}\right), \quad \overline{G}_0 \subset D\left(A_0, \frac{1}{n}\right),$$

所以 $\psi|(\overline{G}_0 \cup A)$是单映射. 尚须证明

$$\psi|(\overline{G}_0 \cup A): \overline{G}_0 \cup A \to \psi(\overline{G}_0 \cup A)$$

是同胚映射. 为此,根据引理 4.1,只须对 X 的任何闭子集 F,验证 $\psi(F \cap (\overline{G}_0 \cup A))$是 Y 的闭子集. 这很容易从下式看出:

$$\psi(F \cap (\overline{G}_0 \cup A)) = \psi(F \cap \overline{G}_0) \cup \psi(F \cap A).$$

关于这里 $\psi(F \cap A)$的闭集性质,推证如下: 因为

$$\psi|A: A \to B$$

是同胚映射,所以 $\psi(F \cap A)$是 B 的闭子集. 而 B 又是 Y 的闭子集,$\psi(F \cap A)$当然也是 Y 的闭子集.

(c) 对于引理所设的一般情形,A 可以表示成可数个紧致集的并集:

$$A=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,\quad A_j\text{ 紧致}.$$

不妨设

$$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset A_{k+1}\subset\cdots.$$

根据(b)中的讨论，存在 A_1 的开邻域 G_1，其闭包 $\overline{G}_1$ 是紧致集，$\psi(\overline{G}_1\cup A)$ 是 Y 的闭子集，并且 $\psi|(\overline{G}_1\cup A)$ 是从 $\overline{G}_1\cup A$ 到 $\psi(\overline{G}_1\cup A)$ 的同胚映射. 假设已定义好了

$$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k,$$

其中各 G_j 是开集，G_j 的闭包 $\overline{G}_j$ 是紧致集，$\psi(\overline{G}_j\cup A)$ 是 Y 的闭子集，并且 $\psi|(\overline{G}_j\cup A)$ 是从 $\overline{G}_j\cup A$ 到 $\psi(\overline{G}_j\cup A)$ 的同胚映射. 我们分别将 $\overline{G}_k\cup A_{k+1}$ 和 $\overline{G}_k\cup A$ 当作(b)中所讨论的 A_0 和 A，则可确定存在开集

$$G_{k+1}\supset\overline{G}_k\cup A,$$

其闭包 $\overline{G}_{k+1}$ 是紧致集，$\psi(\overline{G}_{k+1}\cup A)$ 是 Y 的闭子集，并且 $\psi|(\overline{G}_{k+1}\cup A)$ 是从 $\overline{G}_{k+1}\cup A$ 到 $\psi(\overline{G}_{k+1}\cup A)$ 的同胚映射. 在归纳地定义了满足所述条件的开集序列

$$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_k\subset G_{k+1}\subset\cdots$$

之后，我们记

$$G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

显然 G 是 X 的开子集，并且

$$G\supset\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k=A.$$

(d) 将证 $H=\psi(G)$ 是 Y 的开集，并且 $\psi|G: G\to H$ 是同胚

映射.

为此,首先考察 $H=\psi(G)$的任意一点

$$\psi(p_0),\quad p_0\in G.$$

因为 ψ 是局部同胚映射,所以存在 p_0 点的开邻域 $P_0\subset G$,使得 $\psi(P_0)=Q_0$ 是 Y 的开集. 因为

$$\psi(p_0)\in\psi(P_0)\subset\psi(G)=H,$$

所以 $\psi(p_0)$是 H 的内点. 因为 $H=\psi(G)$的任何点都是内点,所以 H 是开集.

其次,对于 G 的任何一个开子集,考察 $\psi(D)$的任意一点

$$\psi(u_0),\quad u_0\in D.$$

因为有 u_0 的开邻域 $U_0\subset D$,使得 $\psi(U_0)=V_0$ 是开集,并且

$$\psi(u_0)\in\psi(U_0)\subset\psi(D)\subset\psi(G)=H,$$

所以 $\psi(D)$的任何点都是内点,我们证明了 $\psi(D)$是 H 的开子集. 因为对于 G 的任何开子集 D,相应的 $\psi(D)$都是 H 的开子集,所以 $\psi|G:G\to H$ 是开映射.

再来证明 $\psi|G$ 是单映射. 对于 $x,x'\in G$,可设

$$x\in G_h,\quad x'\in G_h.$$

对于

$$l=\max\{h,h'\},$$

应该有

$$x,x'\in G_l.$$

因为 $G_l\subset\overline{G}_l\cup A$,并且

$$\psi|\overline{G}_l\cup A:\overline{G}_l\cup A\to\psi(\overline{G}_l\cup A)$$

是单映射,所以 $\psi|G_l$ 也是单映射. 因此,如果 $x,\ x'\in G$ 使得 $\psi(x)=\psi(x')$,那么必有 $x=x'$. 这证明了 $\psi|G$ 是单映射.

我们证明了 $H=\psi(G)$是 Y 的开集,并且证明了单一连续

映射 $\psi|G: G\to H$ 是开映射. 从而证明了

$$\psi|G: G \to H$$

是同胚映射. □

下面的引理为管状邻域定理提供了最基本的毛胚.

引理 4.3 设 N 是 $\boldsymbol{R}^p$ 的 C^∞ 子流形,并且 N 是 $\boldsymbol{R}^p$ 的闭子集. 设 $E=(TN)^\perp$ 是 TN 在 $T_N\boldsymbol{R}^p$ 中的正交补丛,$\pi: E\to N$ 是向量丛投影,映射 $\psi: E\to \boldsymbol{R}^p$ 定义为

$$\psi(\xi) = \pi(\xi) + \xi, \quad \forall\, \xi\in E$$

(即 $\psi(\xi)=x+\xi$, $\forall\, \xi\in (TN)^\perp_x$, $x\in N$). 则存在 E 中零截面子流形 Z 的开邻域 G 和 $\boldsymbol{R}^p$ 中 N 的开邻域 $H=\psi(G)$,使得 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的 C^∞ 同胚.

证明 对任意的 $0_x\in Z$ 和 $\psi(0_x)=x\in N$,我们来考察切映射

$$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}: (TE)_{0_x} \to \boldsymbol{R}^p = (TN)_x \oplus (TN)^\perp_x.$$

因为 $\psi|Z$ 是从 Z 到 N 的 C^∞ 同胚,所以

$$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}\big| (TZ)_{0_x}: (TZ)_{0_x} \to (TN)_x$$

是线性同构. 另一方面,$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}\big|(T_{0_x}E_x)$ 显然是从 $T_{0_x}E_x$ 到 $(TN)^\perp_x$ 的线性同构. 借助于局部平凡表示,容易看出

$$(TE)_{0_x} = (TZ)_{0_x} \oplus T_{0_x}E_x.$$

由此得知,$(\mathrm{d}\psi)_{0_x}$ 是从 $(TE)_{0_x}$ 到 $\boldsymbol{R}^p=(TN)_x\oplus(TN)^\perp_x$ 的线性同构.

于是,存在 Z 在 E 中的一个开邻域 X,使得对所有的 $\xi\in X$,切映射 $(\mathrm{d}\psi)_\xi$ 都是线性同构. 我们确认:

(1) 映射 ψ 在 X 上是局部 C^∞ 同胚;

(2) $\psi|Z$ 是从 Z 到 N 的 C^∞ 同胚.

根据引理 4.2，存在 Z 的开邻域 $G\subset X$，使得 $H=\psi(G)$ 是 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开集，并且 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的同胚. 又因为 ψ 在 X 上是局部 C^∞ 同胚，所以 $\psi|G$ 是从 G 到 H 的 C^∞ 同胚. □

附注 4.4 考察引理 4.3 中所定义的映射：

$$\psi(\xi)=x+\xi,\quad \xi\in E=(TN)^\perp,\quad x=\pi(\xi)\in N.$$

应该指出：这里的 x 是 N 的点在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的位置向量，ξ 则为 $\boldsymbol{R}^p$ 中 N 在 x 点的任意一个法向量，符号“+”则表示 $\boldsymbol{R}^p$ 中的向量加法.

为了理解引理 4.3 及其证明，需要弄清“抽象的丛”与其“具体表现”之间的区别和联系. 例如，作为抽象的切丛，TN 在不同点上的纤维是不相交的. 然而，作为其具体表现，N 在 x 点的切空间 T_xN 被看作是 $\boldsymbol{R}^p$ 中附着于 x 点的一个 n 维平面 ($n=\dim N$)，附着于不同点的切空间则有可能相交(想一想曲线或曲面的例子). 在引理 4.3 及其证明的表述中，作为“抽象的”法丛，$E=(TN)^\perp$ 的各纤维(“抽象的”法空间)两两不相交. ψ 的像集则是 $E=(TN)^\perp$ 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的具体表现，附着于 N 的不同点的“具体的”法空间有可能相交. 需要证明的关键事实是：ψ 能够将 E 中零截面 Z 的某个开邻域 G 同胚地映为 $\boldsymbol{R}^p$ 中 N 的某个开邻域 H. 对此可作如下的几何解释：限制在 H 的范围内，附着于 N 的不同点的各个法空间两两不相交，并且这些法空间完全覆盖了 H(参看图 10).

抽象概念与具体表现之间的相互关系是理解许多问题的关键. 我们建立抽象法丛 $E=(TN)^\perp$ 的过程，是从具体对象 $N\hookrightarrow\boldsymbol{R}^p$ 为出发点的. 待抽象法丛 $E=(TN)^\perp$ 建立以后，在引理 4.3 的证明中，又通过映射 $\psi: E\to\boldsymbol{R}^p$ 从抽象的法丛回到具体的 $\boldsymbol{R}^p$ 之中.

下面，我们先利用向量丛的第二种定义方式(即定义 2.2)

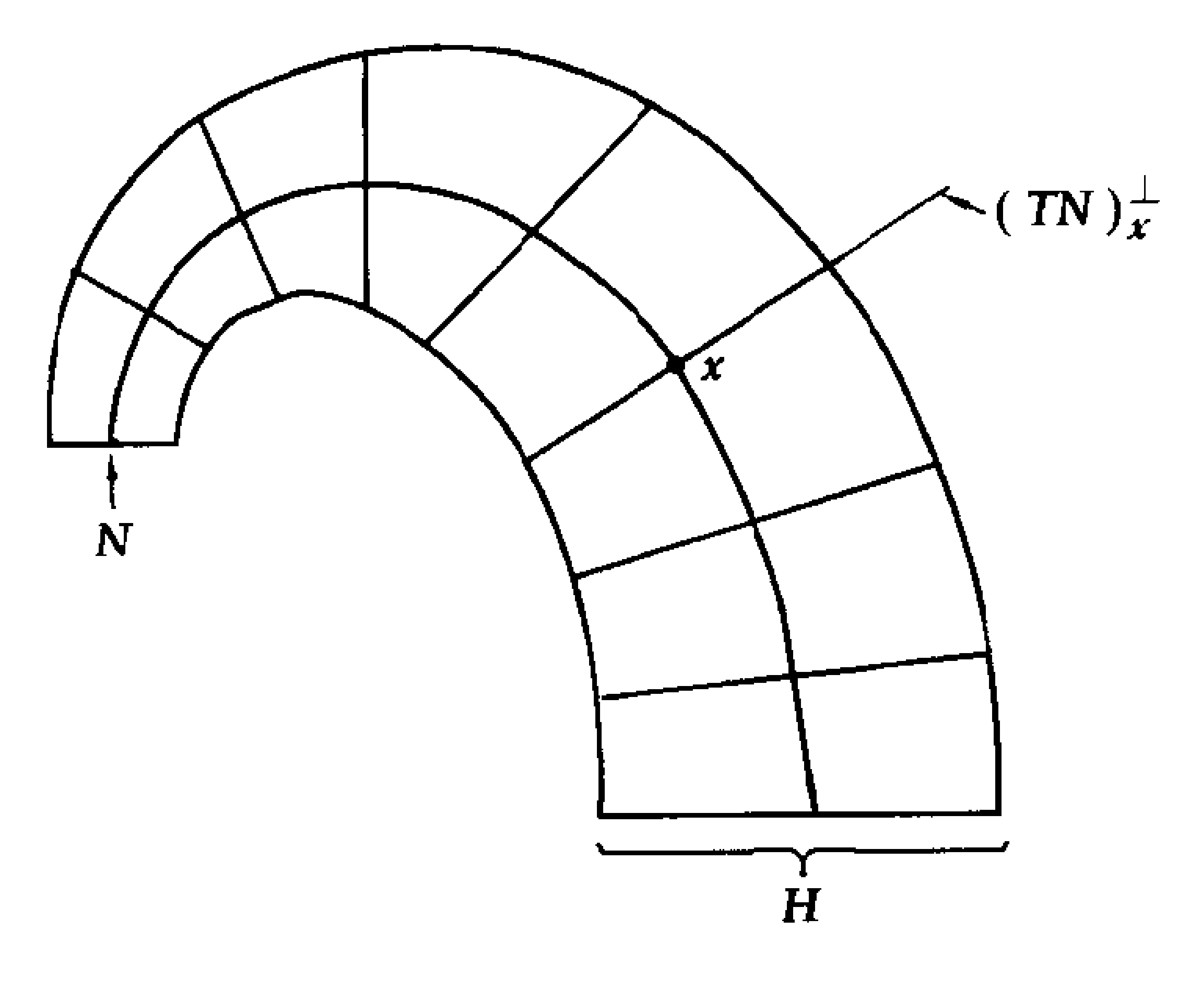


图 10

说明抽象法从 $E=(TN)^{\perp}$的构造，然后较具体地解释引理 4.3 的证明思路.

(1) 首先指出：无交并 $\coprod_{x\in X} E_x$ 可视为集合

$$\{(x,\xi)\mid x\in X,\ \xi\in E_x\}.$$

(2) 对于光滑嵌入到 $\boldsymbol{R}^p$ 中的流形 N，我们来考察 N 的切空间 T_xN 与法空间$(T_xN)^{\perp}$的具体表现.

(2-1) 切空间：设 $u^1,\cdots,u^n$ 是 N 在 x 点邻近的局部坐标，我们来考察向量组

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial u^j}\\ \dfrac{\partial x^2}{\partial u^j}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial x^p}{\partial u^j}\end{bmatrix}\qquad (j=1,\cdots,n).$$

这些向量组生成 $N\hookrightarrow\boldsymbol{R}^p$ 在 x 点邻近各点的切空间.

(2-2) 法空间：对于所述的局部坐标，不妨设

$$\det\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^n}\end{bmatrix}\neq 0.$$

于是,以下这些向量线性无关,局部构成 $T\boldsymbol{R}^p$ 的标架场:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1}\\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1}\\ \frac{\partial x^{n+2}}{\partial u^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^p}{\partial u^1}\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial u^n}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^n}{\partial u^n}\\ \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^n}\\ \frac{\partial x^{n+2}}{\partial u^n}\\ \vdots\\ \frac{\partial x^p}{\partial u^n}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}.$$

采用 Gram-Schmidt 手续,将这局部标架场正交化得到

$$\tau_{U,1}(x),\cdots,\tau_{U,n}(x);\ \sigma_{U,1}(x),\cdots,\sigma_{U,p-n}(x).$$

在所设局部坐标的范围内,这里的前 n 个向量

$$\tau_{U,1}(x),\cdots,\tau_{U,n}(x)$$

仍生成 N 在此范围内各点的切空间;与之正交的后 $p-n$ 个向量

$$\sigma_{U,1}(x),\cdots,\sigma_{U,p-n}(x)$$

生成 N 的各点在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的法空间

(3) 抽象法丛 $E=(TN)^{\perp}$ 的构造.

我们首先写出无交并集合

$$E = \coprod_{x \in N} (T_x N)^{\perp} = \{(x,\xi) \mid x \in N, \xi \in (T_x N)^{\perp}\}.$$

刚才在(2-2)中构造出的

$$\sigma_{U,1}(x), \cdots, \sigma_{U,p-n}(x)$$

给出 E 的局部标架场.

对于 $x \in U \cap V$,须考察标架场之间的变换

$$A_{VU}(x).$$

为此,我们先来考察 $p \times p$ 方阵

$$C_U(x) = [\tau_{U,1}(x), \cdots, \tau_{U,n}(x);\ \sigma_{U,1}(x), \cdots, \sigma_{U,p-n}(x)].$$

显然

$$C_U : U \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^p)$$

是 C^{∞}映射. 对于 $x \in U \cap V$ 有

$$C_U(x) = C_V(x)(C_V(x))^{\mathrm{T}} C_U(x), \tag{4.1}$$

这里正交方阵 $C_V(x)$ 的转置 $(C_V(x))^{\mathrm{T}}$ 就是它的逆方阵 $(C_V(x))^{-1}$. 一方面,向量组

$$\sigma_{V,1}(x), \cdots, \sigma_{V,p-n}(x)$$

与向量组

$$\tau_{U,1}(x), \cdots, \tau_{U,n}(x)$$

相互正交;另一方面,向量组

$$\tau_{V,1}(x), \cdots, \tau_{V,n}(x)$$

与向量组

$$\sigma_{U,1}(x), \cdots, \sigma_{U,p-n}(x)$$

也相互正交. 我们来考察刚才所述的正交性质在以下方阵乘积中的表现:

$$(C_V(x))^{\mathrm{T}} C_U(x). \tag{4.2}$$

于是得到

$$(4.3)\qquad (C_V(x))^{\mathrm{T}} C_U(x) = \underbrace{\left[\begin{array}{c:c} * & 0 \\ \hdashline 0 & A_{VU}(x) \end{array}\right]}_{n \quad p-n} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, p-n \end{array}.$$

由(4.1)和(4.3)可得

$$\sigma_U(x) = \sigma_V(x) A_{VU}(x),$$

这里

$$A_{VU} : U \cap V \to \mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^{p-n})$$

显然是 C^∞ 映射.

至此，根据定义 2.2，我们完成了抽象法丛 $E=(TN)^\perp$ 的构造.

(4) 引理 4.3 证明思路的分析.

对于赋有 $p-n$ 维向量丛结构的抽象法丛

$$E = (TN)^\perp = \{(x,\xi) \mid x \in N,\ \xi \in (T_x N)^\perp\},$$

考察光滑映射

$$\psi : E \to \boldsymbol{R}^p,$$
$$(x,\xi) \mapsto x + \xi.$$

约定将抽象法丛 $E=(TN)^\perp$ 的零截面子流形记为 Z，则显然

$$\psi \mid Z : Z \to N$$

是光滑同胚. Z 当然是抽象法丛 $E=(TN)^\perp$ 的闭子集. 此外，已知 N 是 $\boldsymbol{R}^p$ 的闭子集.

对于 $(x,0) \in Z$ (也就是 $x \in N$)，容易看到：

$$((\mathrm{D}_x\psi)(TZ))_{(x,0)} = T_x N,$$

$$((\mathrm{D}_\xi\psi)(TE_x))_{(x,0)} = (T_x N)^\perp.$$

因此，$\mathrm{D}\psi$ 将线性空间

$$(TE)_{(x,0)} = (TZ)_{(x,0)} \oplus (TE_x)_{(x,0)}$$

映满同样维数的线性空间

$$T_x\boldsymbol{R}^p = (T_xN) \oplus (T_xN)^{\perp}.$$

因而在零截面 Z 的邻近，$\mathrm{D}\psi$ 都是非退化的线性映射. 根据逆函数定理，ψ 在零截面 Z 的邻近是局部光滑同胚. 于是，依据引理 4.2，我们完成了引理 4.3 的证明.

§5 管状邻域定理

引理 5.1 设 $(E, X, \pi, \boldsymbol{R}^k)$ 是一个 C^∞ 向量丛，赋有 C^∞-Riemann度量 β，Z 是 E 的零截面子流形，G 是 Z 的开邻域. 则存在正值 C^∞ 函数 $\varepsilon: X \to \boldsymbol{R}$，使得

$$\Delta_\varepsilon = \{\xi \in E \,\big|\, |\xi| < \varepsilon\pi(\zeta)\} \subset G,$$

这里的 $|\cdot|$ 是由 Riemann 度量 β 决定的范数.

证明 首先指出这样的事实：

(1) 对任意的 $q \in X$，存在 q 在 X 中的开邻域 Q 和正实数 δ，使得

$$\{\xi \in \pi^{-1}(Q) \,\big|\, |\xi| < \delta\} \subset G.$$

为了证明(1)，我们先取含有 q 点的局部平凡域 D 和相应的局部平凡化 $h: \pi^{-1}(D) \to D \times \boldsymbol{R}^k$. 因为 $h(\pi^{-1}(D) \cap G)$ 是 $D \times \boldsymbol{R}^k$ 中零截面的开邻域，所以可取 q 点的闭包为紧致集的开邻域 $Q \subset \overline{Q} \subset D$ 和正实数 γ，使得

$$\{(x,v) \in \overline{Q} \times \boldsymbol{R}^k \,\big|\, \|v\| < \gamma\} \subset h(\pi^{-1}(D) \cap G).$$

约定记

$$\lambda(x,v) = |h^{-1}(x,v)|, \quad \forall (x,v) \in \overline{Q} \times \boldsymbol{R}^k,$$

$$S^{k-1} = \{v \in \boldsymbol{R}^k \,\big|\, \|v\| = 1\}.$$

因为连续函数 λ 在紧致集 $\overline{Q}\times S^{k-1}$ 上取得正的最小值，所以存在常数 $\mu>0$，使得

$$\lambda(x,v)\geqslant\mu,\quad \forall(x,v)\in\overline{Q}\times S^{k-1}.$$

由此易得

$$\lambda(x,v)\geqslant\mu\|v\|,\quad \forall(x,v)\in\overline{Q}\times \boldsymbol{R}^{k}.$$

取 $\delta=\mu\gamma$，则有

$$\lambda(x,v)=|h^{-1}(x,v)|<\delta\Longrightarrow\|v\|<\gamma.$$

由此得知

$$h(\{\xi\in\pi^{-1}(Q)\,\big|\,|\xi|<\delta\})\subset\{(x,v)\in\overline{Q}\times\boldsymbol{R}^{k}\,\big|\,\|v\|<\gamma\}$$
$$\subset h(\pi^{-1}(D)\cap G),$$

因而

$$\{\xi\in\pi^{-1}(Q)\,\big|\,|\xi|<\delta\}\subset G.$$

根据(1)的结论，存在 X 的开覆盖 $\mathscr{Q}=\{Q\}$ 和相应的一族正实数 $\{\delta_Q\}$，使得

$$\{\xi\in\pi^{-1}(Q)\,\big|\,|\xi|<\delta_Q\}\subset G.$$

于是又存在 X 的可数个局部坐标图卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i,W_i $(W_i\subset V_i\subset U_i)$，使得

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族，$\mathscr{U}\prec\mathscr{Q}$；

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3$，$\varphi_i(V_i)=B_2$，$\varphi_i(W_i)=B_1\,(i=1,2,\cdots)$；

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 X.

对每一个 U_i，存在 $\delta_i>0$，使得

$$\{\xi\in\pi^{-1}(U_i)\,\big|\,|\xi|<\delta_i\}\subset G.$$

为了得到引理的结论，还须证明

(2) 存在正值 C^{∞} 函数 $\varepsilon: X\to\boldsymbol{R}$，使得

$$\varepsilon(x)<\delta_k,\quad \forall x\in W_k,\ k\in\boldsymbol{N}.$$

为此，我们选取单位分解$\{\lambda_i\}\subset C_c^\infty(X,\boldsymbol{R})$，使得

$$W_k\subset\{x\in X\mid \lambda_k(x)>0\}\subset \operatorname{supp}\lambda_k\subset V_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

对于 $j\in\boldsymbol{N}$，约定记

$$\varepsilon_j=\min\{\delta_l\mid \overline{V}_l\cap\overline{V}_j\neq\varnothing\},\quad j=1,2,\cdots.$$

然后定义

$$\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_j\lambda_j(x).$$

对于 $x\in W_k$，如果 $\overline{V}_l\cap\overline{V}_k=\varnothing$，那么显然 $\lambda_l(x)=0$. 因而

$$\varepsilon(x)=\sum_{\overline{V}_l\cap\overline{V}_k\neq\varnothing}\varepsilon_l\lambda_l(x)\leqslant\delta_k\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(x)=\delta_k.$$

这样，我们证明了

$$\Delta_\varepsilon=\{\xi\in E\mid |\xi|<\varepsilon\pi(\zeta)\}\subset G.\qquad\square$$

综合引理 4.2，引理 4.3 和引理 5.1 的讨论，我们已经证明了下面的未加修饰的“管状邻域定理”(又称 ε-管状邻域定理).

定理 5.2 设 N 是 $\boldsymbol{R}^p$ 的 C^∞子流形，$E=(TN)^\perp$是 TN 在 $T_N\boldsymbol{R}^p$ 中的正交补丛，$\pi: E\to N$ 是丛的投影，映射 $\psi: E\to\boldsymbol{R}^p$ 定义为

$$\psi(\xi)=\pi(\xi)+\xi,\quad \forall\xi\in E.$$

则存在正值 C^∞ 函数 $\varepsilon: N\to\boldsymbol{R}$，使得 $\Omega=\psi(\Delta_\varepsilon)$是 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开邻域，并且 $\psi|\Delta_\varepsilon$ 是从 Δ_ε 到 Ω 的 C^∞同胚，这里

$$\Delta_\varepsilon=\{\xi\in E\mid \|\xi\|<\varepsilon\pi(\zeta)\},$$

其中的$\|\cdot\|$是由 $\boldsymbol{R}^p$ 中的 Euclid 度量决定的范数. 如果定义 $\rho=\pi\circ\psi^{-1}$(参看图 11)，那么 $\rho:\Omega\to N$ 是 C^∞映射，并且满足

$$(5.1)\qquad \rho(x)=x,\quad \forall x\in N.$$

定理 5.2 中的 Ω 被称为 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的管状邻域，$\rho:\Omega\to N$

被称为管状邻域 Ω 的收缩映射(或管状投影映射).

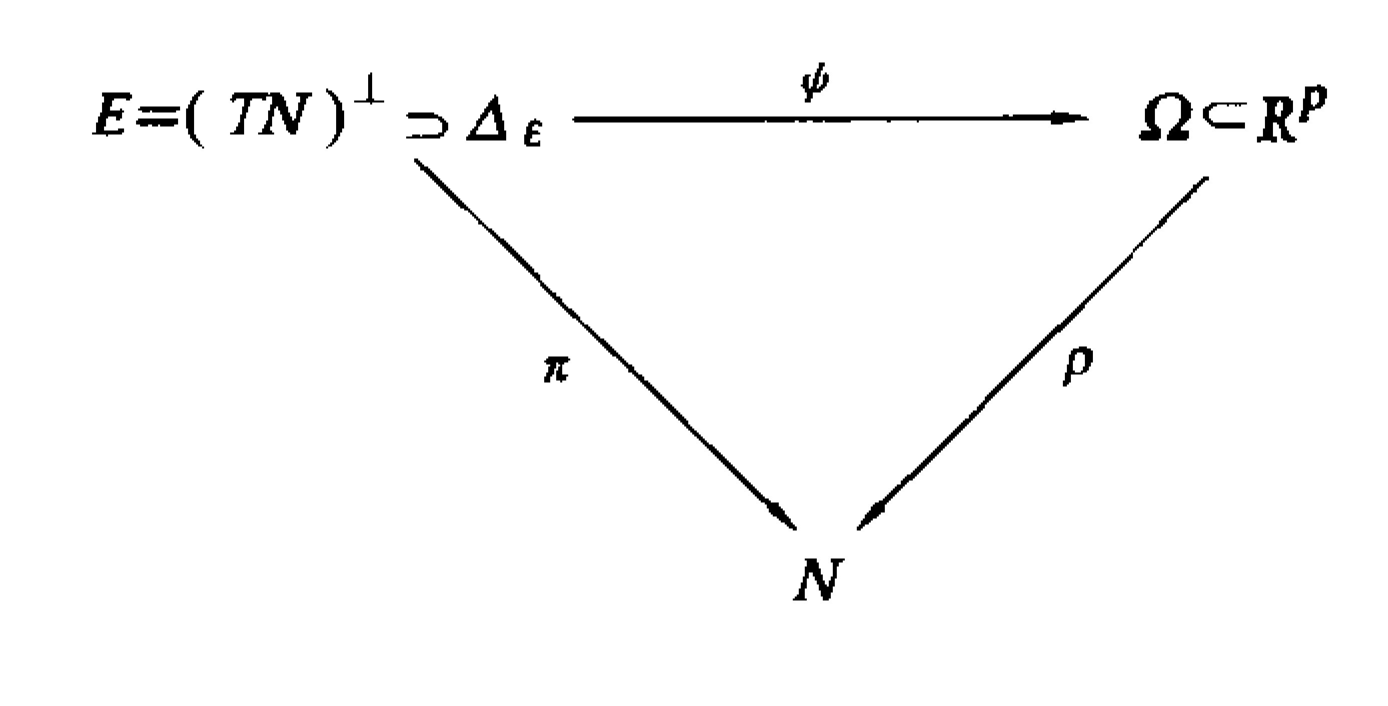


图 11

附注 由(5.1)式可以看出,$\rho:\Omega\to N$ 是 C^{∞}淹没映射. 事实上,切映射 $\mathrm{d}\rho$ 限制到$(TN)_x$ 上是该空间的恒同映射. 本章后的附录 β 将要用到这一结论.

下面的定理 5.3 是管状邻域定理的修饰完成的形式.

定理 5.3 设 N 是 $\boldsymbol{R}^p$ 的 C^{∞}子流形,$E=(TN)^{\perp}$是 TN 在 $T_N\boldsymbol{R}^p$ 中的正交补丛,$\pi:E\to N$ 是向量丛投影. 则存在 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开邻域 Ω 和从 E 到 Ω 的 C^{∞}微分同胚

$$\omega: E=(TN)^{\perp}\to\Omega,$$

使得

$$\omega(0_x)=x,\quad \forall x\in N,$$

并且存在从 Ω 到 N 的 C^{∞}收缩映射 $\rho:\Omega\to N$,使得以下图表可交换(图 12).

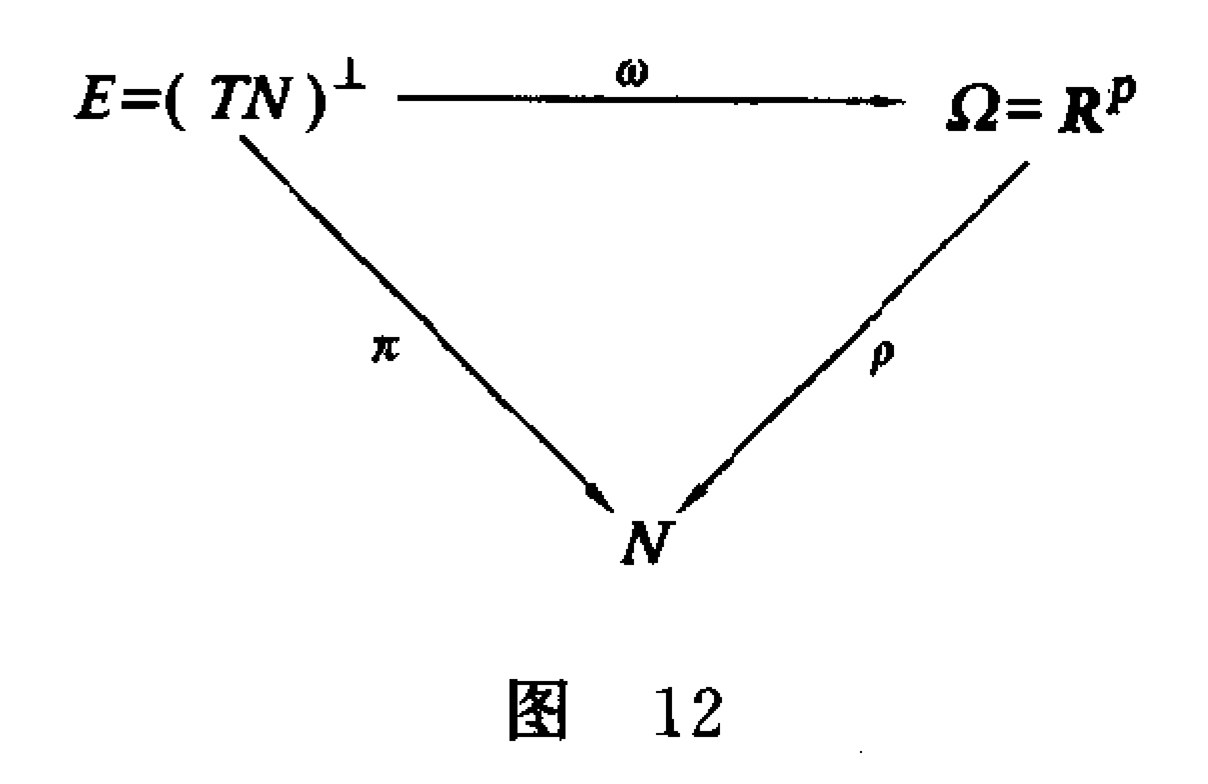


图 12

证明 根据定理 5.2,存在正值 C^{∞}函数

$$\varepsilon: N\to\boldsymbol{R},$$

使得 $\Omega=\psi(\Delta_\varepsilon)$ 是 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开集，并且 $\psi|\Delta_\varepsilon$ 是从 Δ_ε 到 Ω 的 C^∞ 同胚；还存在 C^∞ 收缩映射 $\rho: \Omega\to N$，使得图表 11 可交换（这里沿用上一定理的记号）.

我们构造这样一个从 $E=(TN)^\perp$ 到 Δ_ε 的 C^∞ 映射：

$$\theta(\xi)=\frac{\varepsilon\pi(\zeta)}{\sqrt{1+\|\xi\|^2}}\,\xi.$$

容易看出，θ 的逆映射为

$$\theta^{-1}(\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{(\varepsilon(\pi(\eta)))^2-\|\eta\|^2}},$$

并且 $\theta^{-1}: \Delta_\varepsilon\to E$ 也是 C^∞ 映射. 因此 $\theta: E\to\Delta_\varepsilon$ 是 C^∞ 同胚. 显然 θ 满足等式 $\pi\circ\theta=\pi$，因而有交换图表（图 13）. 如果记 $\omega=\psi\circ\theta$，那么 $\omega: E\to\Omega$ 和 $\rho: \Omega\to N$ 满足定理结论的要求：ω 是从 $E=(TN)^\perp$ 到 Ω 的 C^∞ 同胚，ρ 是从 Ω 到 N 的 C^∞ 收缩映射，并且定理所述的图表（图 12）可交换. □

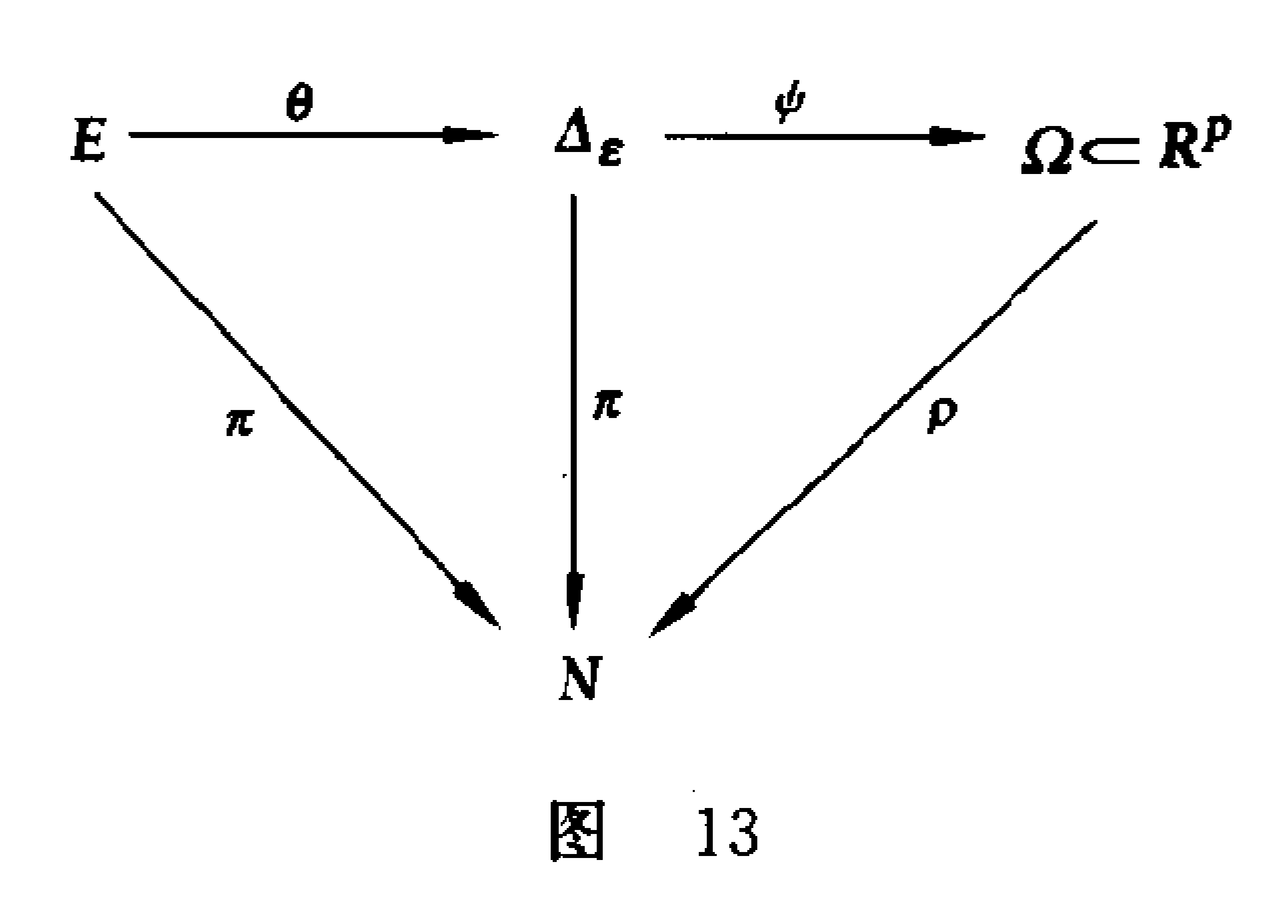


图 13

§6 映射的光滑化与同伦的光滑化

有了管状邻域定理，仿照 §1 中的范例，就可以顺利地解决映射的光滑化问题.

引理 6.1 设 M 是光滑流形，$f: M\to\boldsymbol{R}^p$ 是连续映射，γ 是任意给定的正实数. 则存在光滑映射 $g: M\to\boldsymbol{R}^p$，使得

$$\|g(x) - f(x)\| < \gamma, \quad \forall x \in M.$$

（该引理在§1中已证明了！）

引理 6.2 设 K 是 $\boldsymbol{R}^p$ 中的紧致集，Ω 是 K 的开邻域，则存在 $\delta>0$，使得

$$K_\delta = \{y \in \boldsymbol{R}^p \mid d(y,K) \leqslant \delta\} \subset \Omega.$$

证明 留作练习. □

定理 6.3 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$f: M \to N$ 是连续映射，ε 是给定正实数. 则存在光滑映射 $g: M \to N$，使得

(1) $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in M$;

(2) $g \sim f$.

证明 记 $p = 2\dim N + 1$，将 N 嵌入到 $\boldsymbol{R}^p$ 之中. 设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的管状邻域，$\rho: \Omega \to N$ 是相应的收缩映射. 对于 $K = f(M)$ 和 Ω，按照引理 6.2 确定正数 δ，使得

$$K_\delta = \{y \in \boldsymbol{R}^p \mid \exists z \in K: \|y - z\| \leqslant \delta\} \subset \Omega.$$

因为 ρ 限制在紧致集 K_δ 上具有一致连续性，所以存在 $\sigma>0$，使得只要

$$y_1, y_0 \in K_\delta, \quad \|y_1 - y_0\| < \sigma,$$

就有

$$\|\rho(y_1) - \rho(y_0)\| < \varepsilon.$$

根据引理 6.1，存在光滑映射 $g_0: M \to \boldsymbol{R}^p$，适合条件

$$\|g_0(x) - f(x)\| < \min(\delta, \sigma), \quad \forall x \in M.$$

我们定义

$$h_0(t,x) = (1-t)g_0(x) + tf(x), \quad \forall t \in I,\ x \in M.$$

显然有

$$\|h_0(t,x) - f(x)\| < \delta, \quad \forall t \in I,\ x \in M.$$

因为

$$g_0(M) \subset \Omega, \quad h_0(I \times M) \subset \Omega,$$

所以可以定义

$$g = \rho \circ g_0, \quad h = \rho \circ h_0.$$

这样得到

$$g \in C^{\infty}(M, N), \quad h \in C^0(I \times M, N).$$

容易验证：

(1) $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x \in M$;

(2) $g \overset{h}{\sim} f$. □

再来考察同伦的光滑化问题.

定义 6.4 设 $f_0, f_1: M \to N$ 是光滑映射，$I = [0,1]$ 是实数区间. 如果存在光滑映射 $F: I \times M \to N$，使得对于某个 $\gamma \in (0, 1/3]$ 有

$$F(t,x) = f_0(x), \quad \forall t \in [0, \gamma], \ x \in M,$$

$$F(t,x) = f_1(x), \quad \forall t \in [1-\gamma, 1], \ x \in M,$$

那么我们就说 f_0 光滑同伦于 f_1，记为

$$f_0 \sim f_1 \quad (C^{\infty}).$$

如有必要指明具体的同伦 F，则可写成

$$f_0 \overset{F}{\sim} f_1 \quad (C^{\infty}).$$

在上面的定义中，要求在 t 开始的一个区段 F 等于 f_0，在 t 终了的一个区段 F 等于 f_1. 这样的规定使得我们能够很容易地验证：如此定义的光滑同伦关系是一种等价关系(特别是：光滑同伦关系具有"传递性").

引理 6.5 设 δ 是任意给定的正实数，M 是紧致光滑流形，$f_0, f_1: M \to \boldsymbol{R}^p$ 是光滑映射. $F: I \times M \to \boldsymbol{R}^p$ 是连续映射，满足条件

$$F(t,x) = f_0(x), \quad \forall t \in [0, 1/3], \ x \in M,$$

$$F(t,x) = f_1(x), \quad \forall t \in [2/3, 1], \ x \in M.$$

则存在光滑映射 $G: I \times M \to \boldsymbol{R}^p$，满足条件

$$G(t,x)=f_0(x),\quad \forall t\in[0,1/9],\ x\in M,$$

$$G(t,x)=f_1(x),\quad \forall t\in[8/9,1],\ x\in M,$$

$$\|G(t,x)-F(t,x)\|<\delta,\quad \forall t\in I,\ x\in M.$$

证明 首先取 $\lambda\in C^{\infty}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$,满足条件

$$\lambda(t)=\begin{cases}1, & \forall t\in[2/9,7/9],\\ 0, & \forall t\in[0,1/9]\bigcup[8/9,1].\end{cases}$$

其次,对乘积流形$(0,1)\times M$和连续映射$F|((0,1)\times M)$引用引理 6.1,可知存在光滑映射 $\widetilde{F}:(0,1)\times M\to\boldsymbol{R}^p$,使得

$$\|\widetilde{F}(t,x)-F(t,x)\|<\delta,\quad \forall t\in(0,1),\ x\in M.$$

我们定义

$$G(t,x)=(1-\lambda(t))F(t,x)+\lambda(t)\widetilde{F}(t,x).$$

则显然 $G:I\times M\to\boldsymbol{R}^p$ 满足引理所陈述的所有要求. □

定理 6.6 设 M 是紧致光滑流形,N 是光滑流形,$f_0,f_1:M\to N$是光滑映射.如果 f_0 连续同伦于 f_1,那么 f_0 也就光滑同伦于 f_1.

证明 记 $p=2\dim N+1$,首先将 N 嵌入到 $\boldsymbol{R}^p$ 之中.

设 F_0 是 f_0 与 f_1 之间的连续同伦.我们定义

$$F(t,x)=\begin{cases}F_0(0,x), & 若\ t\in[0,1/3],\\ F_0(3t-1,x), & 若\ t\in[1/3,2/3],\\ F_0(1,x), & 若\ t\in[2/3,1].\end{cases}$$

F_0 和 F 都可看成是从 $I\times M$ 到 $\boldsymbol{R}^p$ 的映射.设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的管状邻域,$\rho:\Omega\to N$ 是相应的收缩映射.对于 $K=F(I\times M)=F_0(I\times M)$和 Ω 利用引理 6.2 确定一个正数 δ.根据引理 6.5,存在光滑映射 $G:I\times M\to\boldsymbol{R}^p$,满足条件

$$G(t,x)=f_0(x),\quad \forall t\in[0,1/9],\ x\in M,$$

$$G(t,x)=f_1(x),\quad \forall t\in[8/9,1],\ x\in M,$$

$$\|G(t,x) - F(t,x)\| < \delta, \quad \forall t \in I,\ x \in M.$$

如果令

$$H = \rho \circ G:\ I \times M \to N,$$

那么显然 H 是 f_0 与 f_1 之间的光滑同伦. □

本节的最后,对涉及带边流形的映射光滑化和同伦光滑化说几句话. 事实上,引理 6.1,定理 6.3,引理 6.5 和定理 6.6 都可稍加修改适用于带边流形情形. 下面将对此作简单的介绍. (在第六章的 § 3,我们还将用另外的办法解决这里的问题.)

引理 6.7 设 U_+ 是 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开子集,K 是 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的紧致子集,$K \subset U_+$,δ 是任意给定的正实数. 则对任何 $f \in C^0(U_+, \boldsymbol{R})$,存在 $g \in C^\infty(U_+, \boldsymbol{R})$,使得

$$|g(x) - f(x)| < \delta, \quad \forall x \in K.$$

证明简述 对于 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的开子集 U_+,存在 $\boldsymbol{R}^m$ 的开子集 U,使得

$$U_+ = U \cap \boldsymbol{R}^m_+.$$

U_+ 作为距离空间 U 的闭子集,可适用 Tietze 扩充引理(参看下面的附注). 于是,可以将 $f \in C^0(U_+, \boldsymbol{R})$ 扩充为 $\tilde{f} \in C^0(U, \boldsymbol{R})$. 因为 $\boldsymbol{R}^m_+$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的闭子集,所以 $\boldsymbol{R}^m_+$ 的紧致集 K 必定也是 $\boldsymbol{R}^m$ 的紧致集,并且显然

$$K \subset U.$$

于是可仿照引理 1.1 中的做法,确定一个函数 $\eta \in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R})$,然后定义

$$f_0(x) = \begin{cases} \eta(x)\tilde{f}(x), & \forall x \in U, \\ 0, & \forall x \in \boldsymbol{R}^m \setminus U. \end{cases}$$

接下去的证明就与引理 1.1 完全类似了. □

附注 任何距离空间 (X, d) 必定是正规空间. 事实上,设 A 和 B 是 X 的两个不相交的非空闭子集,则可按以下方式定

义一个连续函数 $f: X\to \boldsymbol{R}$，

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

容易看出

$$f(x)=0,\quad \forall x\in A;$$
$$f(x)=1,\quad \forall x\in B.$$

我们利用 f 确定以下两个开集：

$$G=\left\{x\in X\,\middle|\, f(x)<\frac{1}{2}\right\},\quad H=\left\{x\in X\,\middle|\, f(x)>\frac{1}{2}\right\}.$$

显然 $G\cap H=\varnothing$，并且

$$A\subset G,\quad B\subset H.\qquad \square$$

引理 6.7 对引理 1.1 进行了修改，使之可以适用于带边情形. 接下去，当然可以修改 §1 中的引理 1.2，引理 1.3 和定理 1.4，以适用于带边流形情形，因为这些引理和定理的证明都基于引理 1.1.

于是，可以修改本节的引理 6.1，定理 6.3 和定理 6.6，以适用于带边流形情形. 下面，我们简单陈述修订引理 6.1，定理 6.3 和定理 6.6 所得的结果.

引理 6.8 设 M 是光滑的带边流形，$f: M\to \boldsymbol{R}^p$ 是连续映射，γ 是任意给定的正实数，则存在光滑映射 $g: M\to \boldsymbol{R}^p$，使得

$$\|g(x)-f(x)\|<\gamma,\quad \forall x\in M.$$

定理 6.9 设 M 是紧致光滑的带边流形，N 是光滑的无边流形，$f: M\to N$ 是连续映射，ε 是任意给定的正实数. 则存在光滑映射

$$g: M\to N,$$

满足条件

(1) $d(g(x),f(x))<\varepsilon,\quad \forall x\in M$;

(2) g 连续同伦于 f.

定理 6.10 设 M 是紧致光滑的带边流形，N 是光滑的无边流形，$f_0, f_1: M \to N$ 是光滑映射. 如果 f_0 连续同伦于 f_1，那么 f_0 也就必定光滑同伦于 f_1.

附录β 更一般的管状邻域定理

定理 设 N 是光滑流形，M 是 N 的光滑子流形，$\dim N = n$，$\dim M = m < n$. 则存在

(1) 以 M 为底的光滑向量丛 $(\Gamma, M, \pi, \boldsymbol{R}^{n-m})$，

(2) M 在 N 中的开邻域 Λ，

(3) 光滑同胚 $\lambda: \Gamma \to \Lambda$，

使得

$$\lambda(0_x) = x, \quad \forall x \in M.$$

于是 $r = \pi \circ \lambda^{-1}: \Lambda \to M$ 是光滑的收缩映射，使得图 14 中所示图表可交换.

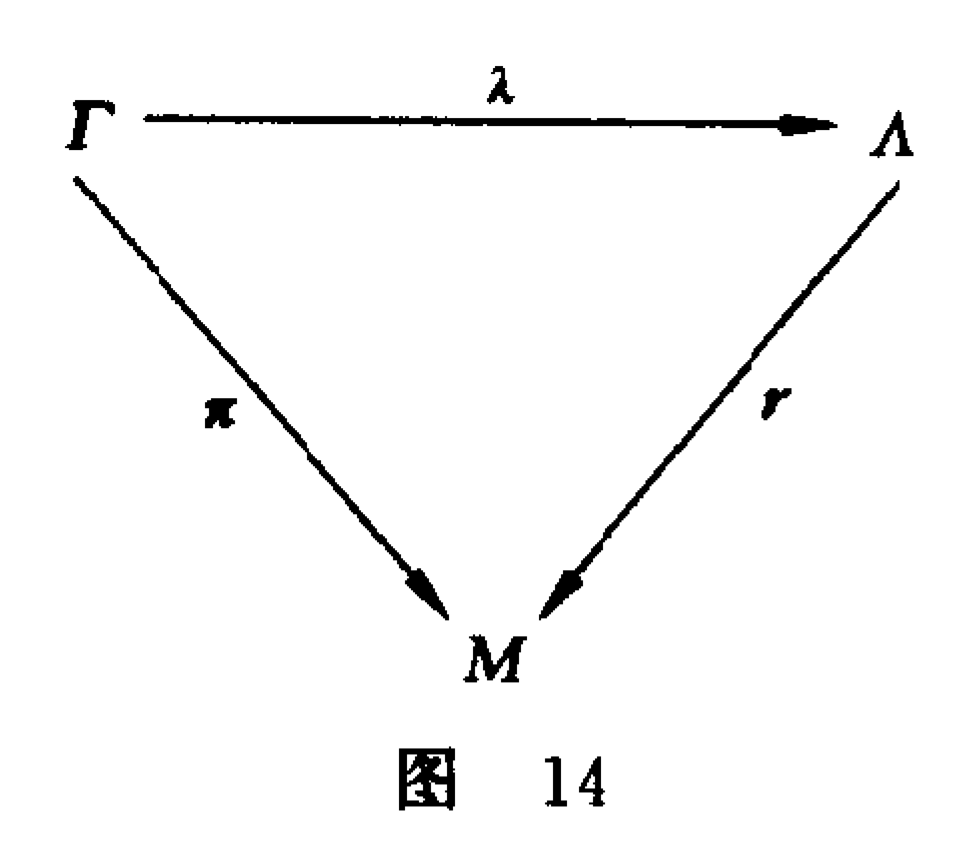


图 14

证明(简述) 记 $p = 2n+1$. 将 N 视为 $\boldsymbol{R}^p$ 的光滑子流形. 于是，根据定理 5.3，存在 N 在 $\boldsymbol{R}^p$ 中的开邻域 Ω 和光滑的收缩映射 $\rho: \Omega \to N$.

以 Γ 表示 TM 在 $T_M N$ 中的正交补丛. 考察从 Γ 到 $\boldsymbol{R}^p$ 中的映射

$$\psi_0(\xi) = x + \xi, \quad \forall \xi \in \Gamma_x,\ x \in M.$$

易知有 Γ 中零截面 Z 的开邻域 Q,使得 $\psi_0(Q)\subset\Omega$. 我们定义

$$\psi = \rho \circ \psi.$$

则映射 $\psi:\Omega\to N$ 满足下面的条件:

(1) 在 Z 的某个开邻域 $X\subset Q$ 中, ψ 是局部 C^∞ 同胚;

(2) $\psi|Z$ 是从 Z 到 M 的 C^∞ 同胚.

于是,我们可以仿照引理 4.3,引理 5.1,定理 5.2 和定理 5.3 中的做法,顺利地完成这个一般形式的"管状邻域定理"的证明. □

练 习 D

定义 如果 C^r 向量丛$(E,X,\pi,\boldsymbol{R}^k)$可以由单独一个平凡化

$$h: E \to X \times \boldsymbol{R}^k$$

予以确定,那么就称这向量丛为**可平凡化的向量丛**.(有的文献直截了当地把这里所称的"可平凡化的向量丛"叫做"平凡丛".)

D.1. 试证 S^1 和 S^3 的切丛都是可平凡化的向量丛.

D.2. 试证任何李群的切丛都必定是可平凡化的向量丛.

D.3. 设 $\rho:\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0\to S^n$ 是径向投影. 试证

$$(\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0,\ S^n,\ \rho,\ \boldsymbol{R})$$

是一个可平凡化的向量丛.

D.4. 试证 $TS^n\oplus(S^n\times\boldsymbol{R})$是可平凡化的向量丛.(这里 TS^n 是 S^n 的切向量丛,$S^n\times\boldsymbol{R}$ 表示以 S^n 为底 $\boldsymbol{R}$ 为纤维的平凡丛.)

D.5. 试赋予(不带边的)Möbius 带适当的结构,使其成为以 S^1 为底,以 $\boldsymbol{R}$ 为纤维型的向量丛 L. 试证这样的向量丛 L 是不可平凡化的,但 $L\oplus L$ 却是可平凡化的向量丛.

D.6. 试证以 $\boldsymbol{R}$ 为底空间的任何一个向量丛都是可平凡化的向量丛.

第五章　正则值与横截性

§1　正则值与 Sard 定理

自从坐标法问世以来，人们热衷于研究各种方程式所表示的曲线或曲面. 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，$f: U \to \boldsymbol{R}^n$ 是 C^r 映射. 对这样一般的 f 和任意的 $b \in \boldsymbol{R}^n$，方程

$$f(x) = b$$

的解集合 $f^{-1}(b)$ 可能相当复杂，与通常曲线或曲面的几何直观大相径庭. 因此有必要考察：哪些 $b \in \boldsymbol{R}^n$ 能保证 $f^{-1}(b)$ 成为 C^r 流形？这就引出了正则值的概念.

定义 1.1　设 M 和 N 是微分流形，N 的维数 $\dim N = n$. 又设 $f: M \to N$ 是可微映射.

(1) 如果 $p \in M$ 使得

$$\operatorname{rank}_p f < n,$$

那么我们就称 p 为 f 的**临界点**. f 的全体临界点的集合记为 C_f 或者 $C(f)$.

如果 $p \in M$ 使得

$$\operatorname{rank}_p f = n,$$

那么我们就称 p 为 f 的**正则点**. f 的全体正则点的集合是 $M \backslash C_f = M \backslash C(f)$.

(2) 如果 $q \in N$ 使得

$$f^{-1}(q) \cap C_f \neq \varnothing,$$

那么我们就称 q 为 f 的**临界值**.

如果 $q \in N$ 使得

$$f^{-1}(q)\cap C_f=\varnothing,$$

那么我们就称 q 为 f 的**正则值**.

附注 f 的全体临界值的集合是 $f(C_f)$. f 的全体正则值的集合是 $N\backslash f(C_f)$(请注意：不是 $f(M\backslash C_f)$). 在正则值的定义中，包括 $f^{-1}(q)=\varnothing$ 的情形，即："不是值"的 $q\in N$ 也属正则值之列.

下面的定理显示了正则值概念的重要性.

定理 1.2(正则值原像定理) 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant 1$)，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$q\in N$ 是 f 的正则值，$f^{-1}(q)\neq\varnothing$. 则$S=f^{-1}(q)$是 M 的 C^r 正则子流形，并且

$$\dim S=\dim M-\dim N.$$

(显然 S 是 M 的闭子集，因而是闭子流形.)

证明 我们利用淹没映射的典范局部表示. 对任意的 $p_0\in S=f^{-1}(q)$，存在 p_0 点邻近的 M 的局部坐标图卡(U,φ)和 q 点邻近的 N 的局部坐标图卡(V,ψ)，使得

$$\varphi(p_0)=0,\quad \psi(q)=0,\quad f(U)\subset V,$$

并且使得

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}=\pi''|\varphi(U),$$

其中 $\pi'': \boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}^{m-n}\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ 是从乘积空间 $\boldsymbol{R}^{m-n}\times\boldsymbol{R}^n$ 到第二个因子空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的投射. 因为

$$p\in U\cap f^{-1}(q)\Longleftrightarrow\varphi(p)\in\varphi(U)\cap\tilde{f}^{-1}(0),$$

所以

$$\varphi(U\cap f^{-1}(q))=\varphi(U)\cap\tilde{f}^{-1}(0)=\varphi(U)\cap(\boldsymbol{R}^{m-n}\times 0).$$

(请注意：对于 $m=n$ 的情形，结论仍成立.) □

例 1.3 设映射 $f: \boldsymbol{R}^{n+1}\to\boldsymbol{R}^1$ 定义为

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=x_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2.$$

易验证：f 是光滑映射，任何实数 $\rho\neq 0$ 都是 f 的正则值，并且对$\rho>0$有 $f^{-1}(\rho)\neq\varnothing$. 于是，对于 $\rho>0$，可以断定 $f^{-1}(\rho)$是$\boldsymbol{R}^{n+1}$的光滑的 n 维正则子流形. 特别地，$S^n=f^{-1}(1)$是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的光滑的 n 维正则子流形.

下面的“唱片引理”是正则值原像定理的重要特殊情形（在以后的讨论中，将多次用到这一重要引理）.

引理 1.4（唱片引理） 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant 1$)，M 是紧致的，$\dim M=\dim N$. 又设 $f: M\to N$ 是 C^r 映射. 如果 $q\in N$ 是 f 的正则值并且 $f^{-1}(q)\neq\varnothing$，那么

(1) $f^{-1}(q)\subset M$ 是有限点集：

$$f^{-1}(q)=\{p_1,\cdots,p_k\};$$

(2) 存在 q 在 N 中的开邻域 V，使得

$$f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

其中 $U_1,\cdots,U_k$ 是 M 中两两不相交的开集，$p_i\in U_i$，并且

$$f|U_i: U_i\to V$$

是 C^r 同胚($i=1,\cdots,k$).

证明 根据定理 1.2（正则值原像定理），$f^{-1}(q)$是 M 的 0 维子流形，也就是由一些孤立点组成的子集. 但 $f^{-1}(q)$作为紧空间 M 的闭子集也是紧致的，所以 $f^{-1}(q)$是有限点集$\{p_1,\cdots,p_k\}$，这证明了(1).

因为

$$\operatorname{rank}_{p_i}f=\dim M=\dim N,$$

所以 f 在 p_i 点邻近是局部 C^r 同胚，即存在 p_i 在 M 中的开邻域 W_i 和 q 点在 N 中的开邻域 V_i，使得 $f|W_i: W_i\to V_i$ 是 C^r 同胚($i=1,\cdots,k$). 必要时适当缩小各 W_i，可设这些 W_i 是两两不相交的：

$$W_i \cap W_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j.$$

显然 $f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i\right)$ 是 N 中的紧致集并且不包含 q 点，所以

$$V = \left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right) \setminus f\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i\right)$$

是 q 点的开邻域. 因为 $\bigcup_{i=1}^{k} W_i$ 以外的点不可能经 f 映入 V 中，所以

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{k} W_i.$$

我们记

$$U_i = W_i \cap f^{-1}(V), \quad i = 1, \cdots, k.$$

则有

$$\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(V),$$

$$\begin{aligned} f(U_i) &= f(W_i \cap f^{-1}(V)) \\ &= f(W_i) \cap V \\ &= V_i \cap V = V, \quad i = 1, \cdots, k, \end{aligned}$$

并且

$$f|U_i : U_i \to V$$

是 C^r 同胚. 我们证明了(2). □

在上面的讨论中，我们又一次用到集合与映射的一个关系式：设 X 和 Y 是集合，$f: X \to Y$ 是映射，$A \subset X$，$B \subset Y$，则

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

既然正则值具有如上面定理 1.2 所述的良好性质，人们自然关心这样的正则值是否有足够多？下面的 Sard 定理肯定地回答了这个问题.

定理 1.5(**Sard 定理**，C^∞ **情形**) 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，

$f\in C^{\infty}(M,N)$，$C(f)$是 f 的临界点集合. 则 $f(C(f))$是 N 中的零测集. 因而 f 的正则值在 N 中处处稠密.

Sard 定理是微分拓扑中许多重要存在定理的基础，其重要性是不言而喻的. 但我们把 Sard 定理的证明放到本章后的附录 γ 中. 因为证明方法虽然不算困难，却是以后较少用到的.

§2 横 截 性

横截性是正则值概念的延伸. 有人曾说："横截性揭开了流形的秘密". 这一概念的重要性可想而知.

定义 2.1 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant 1$)，S 是 N 的 C^r 正则子流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，A 是 M 的任意一个子集.

(1) 如果

$$(2.1)\quad a\in A\cap f^{-1}(S)\Longrightarrow f_{*a}(T_aM)+T_{f(a)}S=T_{f(a)}N,$$

那么我们就说 f 在 A 上与 S **横截**，记为

$$(2.2)\qquad f\pitchfork_A S.$$

请注意，对于 $A\cap f^{-1}(S)=\varnothing$(即 $f(A)\cap S=\varnothing$)的情形，人们认为条件(2.1)自动成立(这是逻辑上普遍采纳的一种约定)，因而认为 f 在 A 上也是与 S 横截的.

(2) 对于 $A=\{p\}$是单点集的情形，如果条件(2.1)得以满足(包括 $p\notin f^{-1}(S)$的情形)，那么我们就说 f 在 p 点与 S 横截，记为

$$f\pitchfork_p S.$$

(3) 对于 $A=M$ 的情形，如果条件(2.1)得以满足(包括 $f(M)\cap S=\varnothing$情形)，那么我们就直接称 f 与 S 横截，并简单地记为

$$f \pitchfork S.$$

(4) 对于 M 是 N 的 C^r 子流形，并且 $f=i: M\to N$ 是放入映射的情形，如果条件(2.1)得以满足，那么我们就说子流形 M 在 A 上与子流形 S 横截，记为

$$M \pitchfork_A S.$$

对于 $f=i: M\to N$ 是放入映射的情形，如果 $A=\{p\}$（单点集）或者 $A=M$，那么也有类似于(2)或(3)中的约定.

例 2.2 我们举出定义 2.1 的一些特例：

(1) 如果 $\dim M \geqslant \dim N$，并且 f 在 A 上是 C^r 淹没，那么对 N 的任何 C^r 子流形 S 都有

$$f \pitchfork_A S.$$

(2) 如果 $S=\{q\}$ 是 N 的单点子集（视为 0 维子流形），那么 $f \pitchfork S$ 意味着 q 是 f 的正则值. 因此，我们可以用记号

$$f \pitchfork \{q\} \quad (\text{或者 } f \pitchfork q)$$

表示：q 是 f 的正则值.

(3) 如果 $\dim M + \dim S < \dim N$，那么 $f \pitchfork_A S$ 的充分必要条件是

$$f(A) \cap S = \varnothing.$$

下面的定理是"在某点横截"的一个重要的判别准则.

定理 2.3 设 M 和 N 是 C^r 流形$(r\geqslant 1)$，S 是 N 的 C^r 正则子流形，

$$\dim M = m, \quad \dim N = n, \quad \dim S = s.$$

又设 $f: M\to N$ 是 C^r 映射，$p\in f^{-1}(S)$，并且(Q,ψ)是 N 在 $q=f(p)$点邻近的关于子流形 S 为正则的 C^r 局部坐标图卡，因而

$$\psi(Q\cap S) = \psi(Q) \cap (\mathbf{R}^s \times 0).$$

在上述前提下，f 在 p 点与 S 横截的充分必要条件为：复合映射 $\pi'' \circ \psi \circ f$ 在 p 点是淹没，这里

$$\pi'': \boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^s \times \boldsymbol{R}^{n-s} \to \boldsymbol{R}^{n-s}$$

是从乘积空间 $\boldsymbol{R}^s \times \boldsymbol{R}^{n-s}$ 到第二个因子空间 $\boldsymbol{R}^{n-s}$ 的投射.

证明 首先指出这样的事实：

$$f \pitchfork_p S \Longleftrightarrow \psi \circ f \pitchfork_p (\boldsymbol{R}^s \times 0).$$

其次，我们可以把 $\psi \circ f$ 写成

$$\psi \circ f = (\pi' \circ \psi \circ f, \pi'' \circ \psi \circ f)$$

(这里的 π' 是从 $\boldsymbol{R}^s \times \boldsymbol{R}^{n-s}$ 到 $\boldsymbol{R}^s$ 的投射). 于是，对于 $\xi \in T_pM$ 有

$$(\psi \circ f)_*(\xi) = ((\pi' \circ \psi \circ f)_*(\xi), (\pi'' \circ \psi \circ f)_*(\xi)).$$

因为

$$((\pi' \circ \psi \circ f)_*(\xi), 0) \in \boldsymbol{R}^s \times 0,$$

所以，要使 $(\psi \circ f)_*(T_pM)$ 与 $\boldsymbol{R}^s \times 0$ 共同生成

$$\boldsymbol{R}^n = (\boldsymbol{R}^s \times 0) \oplus (0 \times \boldsymbol{R}^{n-s}),$$

必须而且只须 $(0, (\pi'' \circ \psi \circ f)_*(T_pM))$ 盖满 $0 \times \boldsymbol{R}^{n-s}$，也就是

$$(\pi'' \circ \psi \circ f)_*(T_pM) = \boldsymbol{R}^{n-s}. \qquad \square$$

命题 2.4(横截的典范局部表示) 在定理 2.3 的条件下，若 f 在 p 点与 S 横截，$p \in f^{-1}(S)$，则存在 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (P, φ)，使得 $f(P) \subset Q$，并且 f 的局部表示 $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 具有以下形式：

$$\tilde{f}(u, v) = (\eta(u, v), v).$$

证明 如同定理 2.3 那样选择 q 点邻近 N 的图卡 (Q, ψ)，使得 $\pi'' \circ \psi \circ f$ 在 p 点为淹没. 然后选择 p 点邻近的 M 的图卡 (P, φ)，使得 $\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 成为淹没的典范表示：

$$\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = v.$$

若记 $\eta(u, v) = \pi' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v)$，则有

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u,v) = (\eta(u,v),v). \qquad \square$$

定理 2.5(横截原像定理) 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant 1$),S 是 N 的 C^r 正则子流形,$f: M\to N$ 是 C^r 映射. 如果 $f \pitchfork S$ 并且 $f^{-1}(S)\neq\varnothing$,那么 $f^{-1}(S)$是 M 的正则子流形,并且

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S) = \operatorname{codim} S.$$

这里的符号 codim 表示子流形的余维数,即

$$\operatorname{codim} S = \dim N - \dim S,$$

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S) = \dim M - \dim f^{-1}(S).$$

证明 设 $\dim M=m$,$\dim N=n$,$\dim S=s$. 根据定理 2.3,对于任意的 $p_0\in f^{-1}(S)$,存在 M 在 p_0 邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 N 在 $q_0=f(p_0)$邻近的局部坐标图卡(V,ψ),使得 $f(U)\subset V$,并且使得映射

$$\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: U \to \boldsymbol{R}^{n-s}$$

成为淹没的典范局部形式:

$$\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1,\cdots,x_t,x_{t+1},\cdots,x_m) = (x_{t+1},\cdots,x_m),$$

其中 $t=m-n+s$,即 $m-t=n-s$. 对于 $p\in U$,我们有

$$p\in f^{-1}(S) \Longleftrightarrow \psi \circ f(p)\in \psi(V)\cap(\boldsymbol{R}^s \times 0)$$
$$\Longleftrightarrow \pi'' \circ \psi \circ f(p) = 0.$$

因而

$$\varphi(U\cap f^{-1}(S)) = (\pi'' \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}(0)$$
$$= \varphi(U)\cap(\boldsymbol{R}^t \times 0).$$

这证明了 $f^{-1}(S)$是 M 的正则子流形,其维数为

$$\dim f^{-1}(S) = t = m - n + s,$$

也就是 $\operatorname{codim} f^{-1}(S) = m - t = n - s. \qquad \square$

§ 3　横截逼近定理

设 M 和 N 是 C^{∞} 流形，S 是 N 的 C^{∞} 正则子流形．本节将证明，对任意的光滑映射

$$f : M \to N,$$

存在这样的与 S 横截的光滑映射

$$g : M \to N,$$

g 可任意逼近 f，并且 $g \sim f$.

设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，K 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的紧致集，$K \subset U$. 对于 $f \in C^1(U, \boldsymbol{R}^n)$，我们约定记

$$|f|_K^{(0)} = |f|_K = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{x \in K} \{ |f_i(x)| \},$$

$$|f|_K^{(1)} = \max \left\{ |f|_K, \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_K, \cdots, \left| \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_K \right\}.$$

引理 3.1　设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，K 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的紧致集，$K \subset U$，$f \in C^1(U, \boldsymbol{R}^n)$. 如果

(3.1)　$$f \pitchfork_K (\boldsymbol{R}^s \times 0),$$

那么存在 $\gamma > 0$，使得只要

$$g \in C^1(U, \boldsymbol{R}^n), \quad |g - f|_K^{(1)} < \gamma,$$

就有

(3.2)　$$g \pitchfork_K (\boldsymbol{R}^s \times 0).$$

证明　设 f 的分量表示为 $f = (f_1, \cdots, f_s, f_{s+1}, \cdots, f_n)$，则有

$$\pi'' \circ f = (f_{s+1}, \cdots, f_n).$$

我们约定以 $\Delta(f, x)$ 表示以下和式：

$$\sum_{i=s+1}^{n}(f_i(x))^2+\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant m}\left(\frac{\partial(f_{s+1},\cdots,f_n)}{\partial(x_{j_1},\cdots,x_{j_t})}\right)^2,$$

这里 $t=n-s$. 由定理 2.3 可知,(3.1)等价于

$$\Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

于是,存在 $\gamma>0$,使得只要

$$g\in C^1(U,\boldsymbol{R}^n),\quad |g-f|_K^{(1)}<\gamma,$$

就也有

$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

这等价于(3.2). □

引理 3.2 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,$f\in C^\infty(U,\boldsymbol{R}^n)$,则对任何 $\gamma>0$,存在 $c\in\boldsymbol{R}^{n-s}$,$\|c\|<\gamma$,使得由

$$g_c(x)=f(x)-(0,c)$$

所定义的映射 $g_c:U\to\boldsymbol{R}^n$ 在 U 上与 $\boldsymbol{R}^s\times 0$ 横截,也就是

$$g_c\pitchfork_U(\boldsymbol{R}^s\times 0).$$

证明 根据 Sard 定理,映射 $\pi''\circ f$ 的正则值在 $\boldsymbol{R}^{n-s}$ 中稠密. 因而可取 $\pi''\circ f$ 的正则值 $c\in\boldsymbol{R}^{n-s}$,使得 $\|c\|<\gamma$. 容易看出:映射

$$\pi''\circ g_c(x)=\pi''\circ f(x)-c$$

以 $0\in\boldsymbol{R}^{n-s}$ 为正则值. 这也就是

$$g_c\pitchfork_U(\boldsymbol{R}^s\times 0).\quad □$$

引理 3.3 设 M 和 N 是 C^∞ 流形,H 是 M 中的紧致集,S 是 N 的 C^∞ 正则子流形,$\dim S=s$,$f\in C^\infty(M,N)$,又设

(1) $f\pitchfork_H S$;

(2) $p_0\in f^{-1}(S)$,(Q,ψ)是 N 在 $q_0=f(p_0)$邻近的关于 S 为正则的局部坐标图卡,(U,φ)是 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡,满足条件

$$\varphi(p_0)=0,\quad \varphi(U)=B_3,\quad f(U)\subset Q.$$

(我们记 $V=\varphi^{-1}(B_2)$，$W=\varphi^{-1}(B_1)$.)

在上述条件下，对任何 $\delta>0$，存在 $g\in C^\infty(M,N)$，使得

(a) $g(p)=f(p)$，$\forall p\in M\backslash V$；

(b) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上与 S 横截；

(c) $d(g(p),f(p))<\delta$，$\forall p\in\overline{V}$，这里的 d 是 N 上的距离.

证明 我们记 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$. 考察紧致集 $K=H\cap\overline{V}$. 根据引理 3.1，存在 $\gamma>0$，使得只要 $|\tilde{g}-\tilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\gamma$，就有

$$\tilde{g}\pitchfork_{\varphi(K)}(\mathbf{R}^s\times 0).$$

选取 $\eta\in C^\infty(M,\mathbf{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\backslash\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\backslash V.\end{cases}$$

在开集 $\varphi(U)=B_3$ 上，对映射 $\tilde{f}$ 用引理 3.2 的结论，可知存在可任意小的 $c\in\mathbf{R}^{n-s}$，使得映射

$$\tilde{g}_c(x)=\tilde{f}(x)-\eta(\varphi^{-1}(x))(0,c)$$

在 $\varphi(\overline{W})=\overline{B}_1$ 上与 $\mathbf{R}^s\times 0$ 横截. 我们定义

$$g(p)=\begin{cases}\psi^{-1}\circ g_c\circ\varphi(p), & \forall p\in U,\\ f(p), & \forall p\in M\backslash\overline{V}.\end{cases}$$

只要 $c\in\mathbf{R}^{n-s}$选择得足够小，可使 $|\tilde{g}-\tilde{f}|^{(1)}_{\varphi(K)}<\gamma$，并可使得

$$d(g(p),f(p))<\delta,\quad \forall p\in\overline{V}.$$

显然这样的 g 满足全部要求. □

定理 3.4 设 M 和 N 是 C^∞ 流形,S 是 N 的 C^∞ 闭子流形,$f\in C^\infty(M,N)$,$\varepsilon\in C^0(M,\mathbf{R})$ 并且 $\varepsilon(p)>0,\forall p\in M$. 则存在 $g\in C^\infty(M,N)$,满足条件

(1) $g\pitchfork S$;

(2) $d(g(p),f(p))<\varepsilon(p),\forall p\in M$;

(3) $g\sim f$.

证明 首先,将 N 嵌入到 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 之中. 设 Ω 是 N 在 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中的管状邻域,而 $\rho:\Omega\to N$ 是相应的 C^∞ 收缩映射.

因为 S 是 N 的闭的正则子流形,所以可选择 N 的一个图汇 $\{(Q,\psi)\}$,使得只要是 $Q\cap S\neq\varnothing$,相应的图卡 (Q,ψ) 就是关于子流形 S 为正则的. 开集族 $\mathscr{Q}=\{f^{-1}(Q)\}$ 覆盖了 M. 因而存在 M 的可数个图卡 (U_i,φ_i) 和开集 $V_i,W_i\subset U_i,i=1,2,\cdots$,使得

(a) $\mathscr{U}=\{U_i\}$ 是局部有限族,且 $\mathscr{U}\prec\mathscr{Q}$;

(b) $\varphi_i(U_i)=B_3$, $\varphi_i(V_i)=B_2$, $\varphi_i(W_i)=B_1$, $i=1,2,\cdots$;

(c) $\mathscr{W}=\{W_i\}$ 覆盖了 M.

因为 $\overline{V}_i$ 是 M 中的紧致集,所以

$$\varepsilon_i=\min_{p\in\overline{V}_i}\{\varepsilon(p)\}>0,\quad i=1,2,\cdots.$$

又因为 $f(\overline{V}_i)$ 是 N 中的紧致集,所以存在 $\delta_i\in(0,\varepsilon_i)$,使得

$$q\in\mathbf{R}^{2n+1},d(q,f(\overline{V}_i))<\delta_i\implies q\in\Omega.$$

约定记

$$\gamma_j=\min\{\delta_i\,|\,\overline{V}_i\cap\overline{V}_j\neq\varnothing\},\quad j=1,2,\cdots.$$

我们取 $f_0=f,H_0=\varnothing$. 然后归纳构造一列映射 $\{f_i\}\subset C^\infty(M,N)$,满足以下条件($i=1,2,\cdots$):

(a_i) $f_i(p)=f_{i-1}(p),\forall p\in M\setminus V_i$;

(b_i) f_i 在 H_i 上与 S 横截，这里

$$H_i = H_{i-1} \cup \overline{W}_i = \bigcup_{j=1}^{i} \overline{W}_j;$$

(c_i) $d(f_i(p), f_{i-1}(p)) < \gamma_i / 2^i$, $\forall p \in \overline{V}_i$.

在完成了这列映射的构造之后，我们定义

$$g(p) = \lim_{j \to \infty} f_j(p).$$

下面验证这样的 g 满足定理的全部要求.

(1) 紧致集 $\overline{W}_i$ 只与有限个 V_j 相交. 不妨设

$$V_j \cap \overline{W}_i = \varnothing, \quad \forall j \geqslant k.$$

显然 $k > i$. 于是，限制在 W_i 上有 $g | W_i = f_k$. 因而 g 在 W_i 上是 C^∞ 的. 又因为 f_k 在 $H_k \supset W_i$ 上是 S 横截的，所以

$$g \pitchfork_{W_i} S.$$

这样的 W_i 覆盖了整个 M，所以有

$$g \in C^\infty(M, N), \quad g \pitchfork S.$$

(2) 对于任意的 $p \in M$，不妨设 $p \in W_i$. 于是有

$$d(g(p), f(p)) < \sum{}' \frac{\gamma_j}{2^j} < \delta_i < \varepsilon(p),$$

这里的 $\sum{}'$ 表示对那些使得 $\overline{V}_j \cap \overline{V}_i \neq \varnothing$ 的 j 求和.

(3) 对于 $p \in M$，将 $g(p)$ 和 $f(p)$ 视为 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中的点. 因为

$$\|(1-t)g(p) + tf(p) - f(p)\| < \delta_i, \quad \forall p \in W_i,$$

$$i = 1, 2, \cdots,$$

所以

$$(1-t)g(p) + tf(p) \in \Omega.$$

因而可定义

$$F(t, p) = \rho((1-t)g(p) + tf(p)).$$

这样定义的 $F: I \times M \to N$ 使得 $g \sim f$. □

对定理 3.4 的证明稍作修改，就可以证明以下的横截扩张定理.

定理 3.5 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 闭子流形，$f\in C^\infty(M,N)$，$\varepsilon\in C^0(M,\boldsymbol{R})$ 并且 $\varepsilon(p)>0,\forall p\in M$. 如果 K 是 M 中的紧致集，使得

$$f\pitchfork_K S,$$

那么存在 $g\in C^\infty(M,N)$，满足以下条件：

(0) $g|K=f|K$；

(1) $g\pitchfork S$；

(2) $d(g(p),f(p))<\varepsilon(p),\ \forall p\in M$；

(3) $g\sim f$.

证明 首先将 N 嵌入到 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中，设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中的管状邻域（ρ 是相应的 C^∞ 收缩映射）.

因为 $f\pitchfork_K S$，所以存在包含 K 的开集 G，使得

$$f\pitchfork_G S.$$

于是，存在 M 的开集 G_0，其闭包 $\overline{G}_0$ 是紧致集，并且

$$K\subset G_0\subset\overline{G}_0\subset G.$$

因为 S 是闭的正则子流形，所以可选择 N 的一个图汇 $\{(Q,\psi)\}$，使得只要 $Q\cap S\neq\varnothing$，相应的图卡 (Q,ψ) 就关于 S 为正则. 我们记

$$\mathscr{Q}=\{G\}\cup\bigcup_Q\{f^{-1}(Q)\cap(M\backslash K)\}.$$

（上面的表示式包括由图汇 $\{(Q,\psi)\}$ 中所有图卡 (Q,ψ) 给出的 $f^{-1}(Q)\cap(M\backslash K)$.）

对于流形 M 及其开覆盖 $\mathscr{Q}$，存在着可数个局部坐标图卡 $\{(U_i,\varphi_i)\}$ 和相应的开集 $V_i,W_i(i=1,2,\cdots)$，满足定理 3.4 证明

中所述的条件(a),(b),(c). 可仿照那里的办法确定相应的正实数 $\varepsilon_i,\delta_i,\gamma_i(i=1,2,\cdots)$.

含于 $\overline{G}_0$ 中的 $\overline{W}_i$ 仅有限个,设为

$$\overline{W}_1,\cdots,\overline{W}_r$$

(如果 $\overline{G}_0$ 不含任何 $\overline{W}_i$,则认为 $r=0$). 我们从 $f_r=f$ 和 $H_r=\overline{G}_0$ 开始,可以仿照定理 3.4 证明中的做法,对于 $i=r+1,r+2,\cdots$,归纳地确定 $f_i\in C^\infty(M,N)$,满足以下条件:

(a_i) $f_i=f_{i-1}$, $\forall p\in M\backslash V_i$;

(b_i) f 在 H_i 上与 S 横截,这里

$$H_i=H_{i-1}\cup W_i=\overline{G}_0\cup\bigcup_{j=r+1}^{i}\overline{W}_j;$$

(c_i) $d(f_i(p),f_{i-1}(p))<\frac{\gamma_i}{2^i}$, $\forall p\in\overline{V}_i$.

然后可定义

$$g(p)=\lim_{k\to\infty}f_k(p).$$

容易验证:这样定义的 g 满足全部要求. □.

§4 关于映射的 C^r 拓扑与 C^r 意义下的逼近

上一节中的横截逼近定理(定理 3.4)只讨论了 C^0 意义下的逼近. 若要讨论 C^r 意义下的逼近,就要设法赋予 $C^s(M,N)$ $(s\geqslant r)$以适当的 C^r 拓扑. 限于篇幅,这里只能作一个概略的介绍.

首先约定一些记号. 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,H 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的紧致集,$H\subset U$. 对于 C^r 映射 $F:U\to\boldsymbol{R}^n$,我们引入记号:

$$|F|_H^{(0)}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sup_{x\in H}\{|F_j(x)|\},$$

$$|F|_H^{(r)}=\max\left\{|F|_H^{(0)},\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_H^{(r-1)},\cdots,\left|\frac{\partial F}{\partial x_m}\right|_H^{(r-1)}\right\}.$$

设 M 和 N 是 C^s 流形. $f\in C^s(M,N)$, $r\leqslant s$. 并设:

(1) $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是 M 的一个局部有限的图汇;

(2) $\mathscr{B}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$是 N 的一个图汇;

(3) $\mathscr{K}=\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$是 M 的一个紧致集族,满足条件:

(a) $K_\alpha\subset U_\alpha$, $\forall\alpha\in A$,

(b) 对每个 $\alpha\in A$,存在确定的 $\beta(\alpha)$,使得 $f(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}$,

(c) $\bigcup\limits_{\alpha\in A}K_\alpha\supset M$;

(4) $\mathscr{E}=\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in A}$是一族正实数.

对于如上所述的任意一族 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$,用记号 $\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$表示满足下列条件的 g 的集合:

(1) $g\in C^s(M,N)$;

(2) $g(K_\alpha)\subset V_{\beta(\alpha)}$, $\forall\alpha\in A$;

(3) $|\widetilde{g}_\alpha-\widetilde{f}_\alpha|_{\varphi_\alpha(K\alpha)}^{(r)}<\varepsilon_\alpha$, $\forall\alpha\in A$,

这里 $\widetilde{f}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}$, $\widetilde{g}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}$.

对于固定的 $r\leqslant s$,以所有这样的

$$\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$$

为 f 的基本邻域系,我们就可以建立 $C^s(M,N)$的拓扑. 这就是 $C^s(M,N)$的 Whitney C^r 拓扑(又称 C^r 强拓扑).

现在设 M 和 N 是 C^∞ 流形, $f\in C^\infty(M,N)$. 对于 $r=0,1,2,\cdots$和所有允许的 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{E}$,以所有的

$$\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$$

为 f 的基本邻域系,这样建立的 $C^\infty(M,N)$的拓扑,被称为 Whitney C^∞ 拓扑(又称 C^∞ 强拓扑).

建立了 C^r 拓扑之后,就可着眼于更一般的横截逼近定理.

首先，对引理 3.3 的证明作很小的修改，就可证明以下的引理.

引理 4.1 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，H 是 M 中的紧致集，S 是 N 的 C^∞ 闭子流形，$f\in C^\infty(M,N)$. 又设：

(1) $f \pitchfork_H S$；

(2) $p_0\in f^{-1}(S)$，(Q,ψ)是 N 在 $q_0=f(p_0)$邻近的关于子流形 S 为正则的局部坐标图卡，(U,φ)是 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡，满足条件

$$\varphi(p_0)=0,\quad \varphi(U)=B_3,\quad f(U)\subset Q.$$

(我们记 $V=\varphi^{-1}(B_2)$，$W=\varphi^{-1}(B_1)$.)

在上述条件下，对任何 $\delta>0$，存在 $g\in C^\infty(M,N)$，使得

(a) $g(p)=f(p)$，$\forall p\in M\setminus V$；

(b) g 在 $H\cup\overline{W}$上与 S 横截；

(c) $\left|\widetilde{g}-\widetilde{f}\right|^{(r)}_{\varphi(V)}<\delta$,

这里 $\widetilde{g}=\psi\circ g\circ\varphi^{-1}$，$\widetilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$.

下面是 C^∞ 意义下的横截逼近定理.

定理 4.2 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 闭子流形. 则与 S 横截的 $g\in C^\infty(M,N)$在 $C^\infty(M,N)$中稠密.

证明 对任意的 $f\in C^\infty(M,N)$和 C^∞ 拓扑中 f 的任意一个邻域 $\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$，需要证明存在 $g\in\mathscr{U}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$，使得

$$g\pitchfork S.$$

只须对定理 3.4 的证明作少许修改(以引理 4.1 代替引理 3.3)，就可完成这里的证明. □

下面的定理说明：横截性不会因小的扰动而遭到破坏.

定理 4.3 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，S 是 N 的 C^∞ 闭子流形. 则集合

$$\mathscr{T}_S = \{g \in C^\infty(M,N) \mid g \pitchfork S\}$$

是 C^1 拓扑中的开集(因而也是 C^∞ 拓扑中的开集).

证明 因为 S 是 N 的闭正则子流形,所以可以选择 N 的图汇 $\{(Q_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$,使得只要 $Q_\beta \cap S \neq \varnothing$,相应的图卡 (Q_β,ψ_β) 就是关于子流形 S 为正则的. 对于任意一个 $f\in C^\infty(M,N)$,开集族 $\mathscr{Q}=\{f^{-1}(Q_\beta)\}_{\beta\in B}$ 覆盖了 M. 因而存在 M 的可数个局部坐标图卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和开集 V_α, $W_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha=1,2,\cdots$,使得

(1) $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是局部有限族且 $\mathscr{U}\prec\mathscr{Q}$;

(2) $\varphi_\alpha(U_\alpha)=B_3$, $\varphi_\alpha(V_\alpha)=B_2$, $\varphi_\alpha(W_\alpha)=B_1$;

(3) $\mathscr{W}=\{W_\alpha\}$ 覆盖了 M.

记 $K_\alpha=\overline{W}_\alpha$. 在开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha)=B_3$ 上,对局部表示映射 $\widetilde{f}_\alpha=\psi_{\beta(\alpha)}\circ f\circ \varphi_\alpha^{-1}$ 用引理 3.1 的结论可知:存在 $\varepsilon_\alpha>0$,使得只要 $\left|\widetilde{g}_\alpha-\widetilde{f}_\alpha\right|^{(1)}_{\varphi_\alpha(K_\alpha)}<\varepsilon_\alpha$,就必定有

$$g \pitchfork_{K_\alpha} S.$$

如果记

$$\mathscr{A} = \{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}, \quad \mathscr{B} = \{(Q_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B},$$
$$\mathscr{K} = \{K_\alpha\}, \quad \mathscr{E} = \{\varepsilon_\alpha\},$$

那么显然 f 的邻域 $\mathscr{U}^{(1)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$ 包含在集合 $\mathscr{T}_S$ 之中. □

注记 4.4 如果 S 不是闭的,那么定理 4.3 的结论可以不成立. 请看下面的反例:

$$M= \{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=1\}, \quad N=\boldsymbol{R}^2,$$
$$S= \{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0<x<2,\ y=0\},$$
$$f(x,y)=(x,y), \qquad \forall\,(x,y)\in M,$$
$$g(x,y)=(x+a,y), \quad \forall\,(x,y)\in M.$$

显然 $f,g\in C^{\infty}(M,N)$. 取 $a>0$ 充分小可使 g 在 C^{∞} 意义下任意接近 f. 但是

$$f\in\mathscr{T}_S,\quad g\notin\mathscr{T}_S.$$

(参看图 15.)

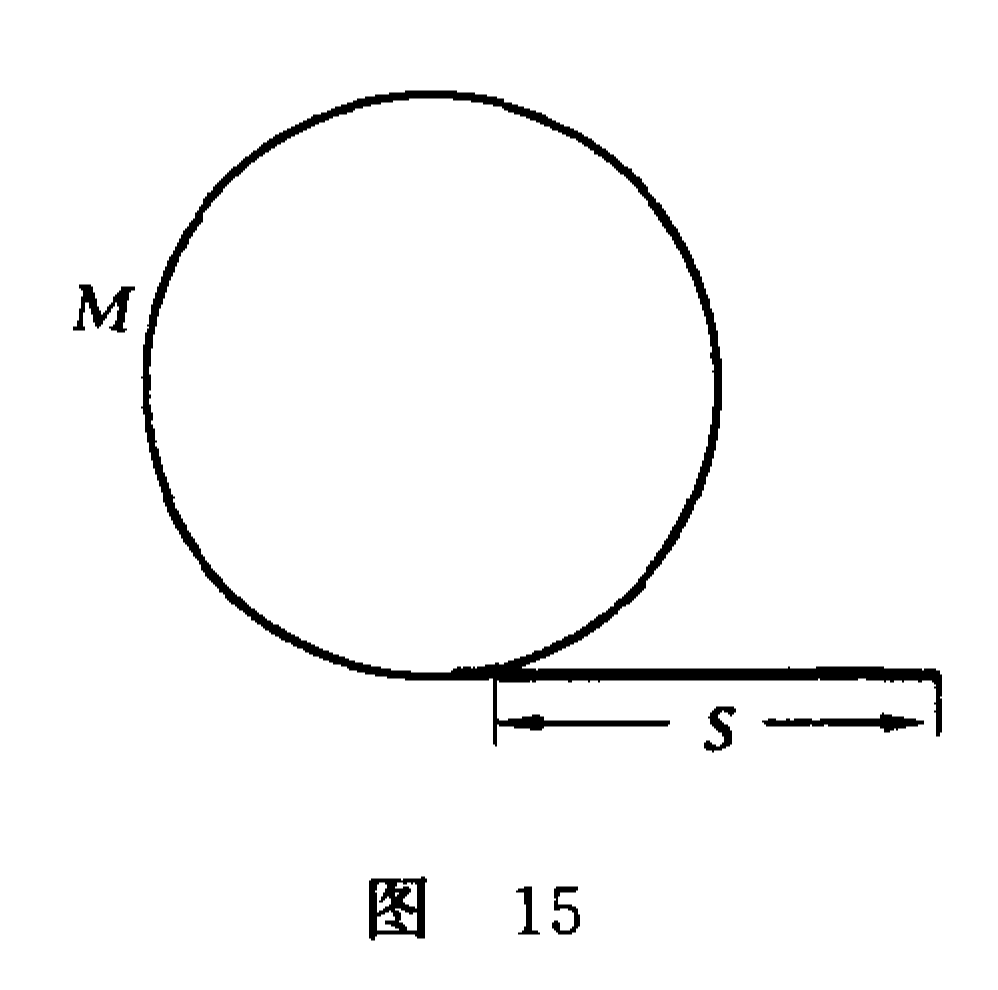


图 15

§5 参数横截性定理与涉及带边流形的定理

我们约定记

$$\boldsymbol{R}_{+}^{m}=\{(x^{1},\cdots,x^{m})\in\boldsymbol{R}^{m}\,|\,x^{1}\geqslant 0\}.$$

设 M 是 m 维带边流形, $p\in M$. 如果存在 M 的局部坐标图卡 (U,φ) $(\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}_{+}^{m})$, 使得 $p\in U$, $\varphi(p)\in 0\times\boldsymbol{R}^{m-1}$, 那么我们就说 p 是 M 的边缘点. M 的全体边缘点的集合记为 ∂M.

设 M 是一个带边流形, N 是一个无边流形. 我们将映射 $f: M\to N$ 在 ∂M 上的限制记为

$$\partial f=f\,|\,\partial M:\partial M\to N.$$

带边流形 M 的边缘 ∂M 是一个(低一维的)无边流形. 如果 f 是 C^{r} 映射, 那么 ∂f 也是 C^{r} 映射. 对于 f 和 ∂f 的临界点, 有这样的关系(练习 E.2):

$$C(\partial f)\supset C(f)\cap\partial M.$$

定理 5.1(带边流形的 Sard 定理) 设 M 是带边 C^{∞} 流形,

N 是无边 C^∞ 流形，$f: M\to N$ 是 C^∞ 映射. 则 f 与 ∂f 的临界值集合的并集是零测集. 因而几乎所有的 $q\in N$ 都是 f 与 ∂f 共同的正则值.

证明 因为

$$C(f) = (C(f)\cap(M\backslash\partial M))\cup(C(f)\cap\partial M),$$
$$C(f)\cap\partial M\subset C(\partial f),$$

所以

$$C(f)\cup C(\partial f) = (C(f)\cap(M\backslash\partial M))\cup C(\partial f).$$

由此得到

$$\begin{aligned} f(C(f))\cup\partial f(C(\partial f)) &= f(C(f)\cup C(\partial f)) \\ &= f((C(f)\cap(M\backslash\partial M))\cup C(\partial f)) \\ &= f(C(f)\cap(M\backslash\partial M))\cup\partial f(C(\partial f)). \end{aligned}$$

因为 $M\backslash\partial M$ 和 ∂M 都是无边流形. 只须引用无边情形的 Sard 定理(即定理 1.5)，就可以完成本定理的证明. □

为了讨论涉及带边流形的"正则值原像定理"和"横截原像定理"，我们需要考察带边情形的淹没的局部表示.

引理 5.2(淹没的典范局部表示) 设 $r\geqslant 1$, M 是 C^r 带边的流形，N 是 C^r 无边的流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$p\in\partial M$. 若 $\partial f: \partial M\to N$ 在 p 点是淹没，则有 M 在 p 点邻近的图卡 (U,φ) 和 N 在 $q=f(p)$ 点邻近的图卡 (V,ψ)，使得

(1) $\varphi(U)\subset\boldsymbol{R}^m_+$, $\varphi(U\cap\partial M)\subset 0\times\boldsymbol{R}^{m-1}$,

$\varphi(p)=0\in\boldsymbol{R}^m_+$, $\psi(q)=0\in\boldsymbol{R}^n$, $f(U)\subset V$;

(2) f 的局部表示 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 成为向最后 n 个坐标的投影，即

$$\tilde{f}(u^1,\cdots,u^m) = (u^{m-n+1},\cdots,u^m).$$

证明 首先选取 M 在 p 点邻近之图卡 (U_0,φ_0) 和 N 在 $q=$

$f(p)$点邻近之图卡(V,ψ)，满足条件：

$$\varphi_0(U_0)\subset \boldsymbol{R}^m_+,\quad \varphi_0(U_0\cap\partial M)\subset 0\times \boldsymbol{R}^{m-1},$$

$$\varphi_0(p)=0\in \boldsymbol{R}^m_+,\quad \psi(q)=0\in \boldsymbol{R}^n,\quad f(U_0)\subset V.$$

因为 ∂f 在 p 点为淹没，所以映射

$$(x^2,\cdots,x^m)\mapsto \widetilde{f}_0(0,x^2,\cdots,x^m)$$

在点$(x^2,\cdots,x^m)=(0,\cdots,0)$为淹没. 不妨设

$$\frac{\partial(\widetilde{f}^1_0,\cdots,\widetilde{f}^n_0)}{\partial(x^{m-n+1},\cdots,x^m)}\neq 0.$$

我们作坐标变换

$$\begin{cases} u^1=x^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^t=\qquad x^t, \\ u^{t+1}=\widetilde{f}^1_0(x^1,\cdots,x^t,x^{t+1},\cdots,x^m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^m=\widetilde{f}^n_0(x^1,\cdots,x^t,x^{t+1},\cdots,x^m), \end{cases}$$

其中 $t=m-n$. 显然有

$$\left.\frac{\partial(u^1,\cdots,u^m)}{\partial(x^1,\cdots,x^m)}\right|_{x=0}\neq 0.$$

以 $u^1,\cdots,u^m$ 作为新的局部坐标，得到 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡(U,φ)，其中 $U\subset U_0$. 容易看出，这时引理的全部要求都得到满足. □

定理 5.3(带边情形的正则值原像定理) 设 $r\geqslant 1$，M 是 C^r 带边流形，N 是 C^r 无边流形，$f: M\to N$ 是 C^r 映射. 如果 $q\in N$ 是 f 和 $\partial f=f|\partial M$ 二者共同的正则值并且 $f^{-1}(q)\neq\varnothing$，那么 $S=f^{-1}(q)$是 M 的 $m-n$ 维正则子流形(可带边)，并且

$$\partial S = S \cap \partial M.$$

证明 如若 $p_0 \in S \cap (M \backslash \partial M)$，则 p_0 点邻近的状况与无边流形完全一样. 因此不妨设 $p_0 \in S \cap \partial M$. 我们选择 p_0 点邻近的局部坐标如引理 5.2 所述. 因为

$$p \in U \cap f^{-1}(q) \Longleftrightarrow \varphi(p) \in \tilde{f}^{-1}(0),$$

所以

$$\varphi(U \cap S) = \tilde{f}^{-1}(0) = \varphi(U) \cap (\boldsymbol{R}_+^{m-n} \times 0^n).$$

这证明了 S 是 M 的 $m-n$ 维正则子流形. 又因为

$$p \in U \cap f^{-1}(q) \cap \partial M \Longleftrightarrow \varphi(p) \in \tilde{f}^{-1}(0) \cap (0 \times \boldsymbol{R}^{m-1}),$$

所以有

$$\begin{aligned}\varphi(U \cap S \cap \partial M) &= \tilde{f}^{-1}(0) \cap (0 \times \boldsymbol{R}^{m-1}) \\ &= \varphi(U) \cap (0 \times \boldsymbol{R}^{m-n-1} \times 0^n) = \varphi(U \cap \partial S).\end{aligned}$$

由此得知

$$S \cap \partial M = \partial S. \qquad \square$$

定理 5.4（**带边情形的横截原像定理**） 设 $r \geqslant 1$，M 是 C^r 带边流形，N 是 C^r 无边流形，S 是 N 的 C^r 正则子流形，$f: M \to N$ 是 C^r 映射. 如果

$$f \pitchfork S, \quad \partial f \pitchfork S, \quad f^{-1}(S) \neq \varnothing,$$

那么 $f^{-1}(S)$就是 M 的 C^r 正则子流形，其边缘为

$$\partial f^{-1}(S) = f^{-1}(S) \cap \partial M,$$

并且

$$\operatorname{codim} f^{-1}(S) = \operatorname{codim} S.$$

证明 设 $\dim M = m$，$\dim N = n$，$\dim S = s$. 对于任意的 $p_0 \in f^{-1}(S)$，首先选取 N 在点 $q_0 = f(p_0)(\in S)$邻近的关于 S 为正则的局部坐标图卡(V, ψ)，并选取点 p_0 的开邻域 U_0，满足条件 $f(U_0) \subset V$. 我们定义这样一个映射

$$g = \pi'' \circ \psi \circ f \mid U_0 : U_0 \to \boldsymbol{R}^{n-s}.$$

容易看出

$$U_0 \cap f^{-1}(S) = U_0 \cap g^{-1}(0).$$

因为 C^∞ 映射 $g: U_0 \to \boldsymbol{R}^{n-s}$ 以 0 为正则值，所以根据定理 5.3 可知，存在 M 在 p_0 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ)，$U \subset U_0$，使得

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap f^{-1}(S)) &= \varphi(U \cap g^{-1}(0)) \\ &= \varphi(U) \cap (\boldsymbol{R}_+^{m-n+s} \times 0^{n-s}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap f^{-1}(S) \cap \partial M) &= \varphi(U \cap g^{-1}(0) \cap \partial M) \\ &= \varphi(U) \cap (0 \times \boldsymbol{R}^{m-n+s-1} \times 0^{n-s}). \ \square \end{aligned}$$

对于带边流形，也有与 § 3 中定理 3.4 和定理 3.5 相应的结果. 这些结果当然可以通过修改 § 3 中的做法予以证明. 但我们宁愿探讨另一种不同风格的证明(同时也给出 § 3 中的定理的新的证明).

先证明一个有用的引理.

引理 5.5 设 $\beta: X \to Y$ 和 $\gamma: Y \to Z$ 是光滑流形之间的光滑映射，S 是 Z 的光滑的正则子流形，$\gamma \pitchfork S$，则

$$\gamma \circ \beta \pitchfork S \Longleftrightarrow \beta \pitchfork \gamma^{-1}(S).$$

证明 设 $\dim X = k$，$\dim Y = m$，$\dim Z = n$，$\dim S = s$，并记

$$W = \gamma^{-1}(S).$$

只须对任意的 $x \in \beta^{-1}(\gamma^{-1}(S))$ 验证

$$(5.1) \qquad \gamma \circ \beta \pitchfork_x S \Longleftrightarrow \beta \pitchfork_x W.$$

这是一个局部性的论断，可以选择适当的局部坐标图卡，通过映射 β 和 γ 的局部坐标表示加以验证. 为了避免引入太多的符号，不妨设 X，Y 和 Z 就是局部坐标域，$\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}$ 和 $\widetilde{Z}$ 分别是它们在坐标映射下的像集，$\widetilde{S}$ 和 $\widetilde{W}$ 分别是 S 和 W 在局部坐标域内的

那一部分的像集，$\widetilde{\beta}$和$\widetilde{\gamma}$分别是β和γ的局部表示. 在这样的约定下，局部状况就如图 16 中图表所示.

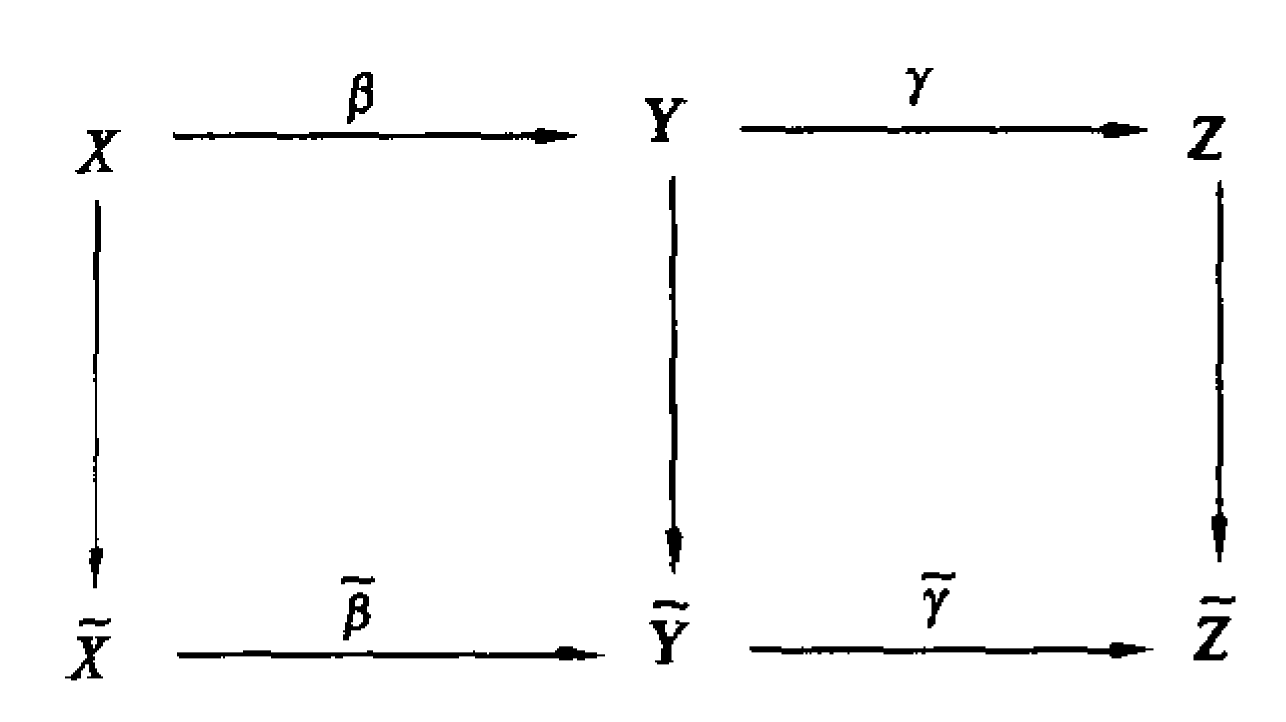


图 16　表现局部状况的交换图表

下面说明局部坐标应该怎样选取以方便于验证(5.1). 首先，所选取的 Z 的局部坐标应该是关于 S 为正则的，因而可设

$$\widetilde{Z}=H\times V,\quad \widetilde{S}=H\times 0,$$

其中

$$V=\{v\in \boldsymbol{R}^{n-s}\mid \|v\|<\varepsilon\}.$$

其次，所选取的 Y 的局部坐标应该使得 $\pi''\circ\widetilde{\gamma}$ 具有淹没的局部典范形式，即 $\pi''\circ\widetilde{\gamma}(u,v)=v$. 于是可设

$$\widetilde{Y}=U\times V,\quad \widetilde{W}=U\times 0,$$

并且可设 γ 的局部表示是

(5.2)
$$\widetilde{\gamma}(u,v)=(\eta(u,v),v).$$

顺便指出，(5.2)是一般情形下具有横截性质的映射的典范局部形式. 从(5.2)式可以看出

(5.3)
$$\pi''\circ\widetilde{\beta}=\pi''\circ\widetilde{\gamma}\circ\widetilde{\beta}.$$

(上式左边的 π''是从 $U\times V$ 到 V 的投射，右边的 π''是从 $H\times V$ 到 V 的投射.)

于是，在如上所述的局部范围内应有

$$\gamma\circ\beta\pitchfork S\Longleftrightarrow\widetilde{\gamma}\circ\widetilde{\beta}\pitchfork\widetilde{S}\Longleftrightarrow\pi''\circ\widetilde{\gamma}\circ\widetilde{\beta}\pitchfork 0$$

$$\Longleftrightarrow\pi''\circ\widetilde{\beta}\pitchfork 0\Longleftrightarrow\widetilde{\beta}\pitchfork\widetilde{W}\Longleftrightarrow\beta\pitchfork W.$$

这证明了(5.1),从而完成了引理的证明. □

定理 5.6(含参数的横截性定理,无边情形) 设 Λ,M 和 N 是 C^∞ 流形,S 是 N 的 C^∞ 正则子流形,并设 $F: \Lambda\times M\to N$ 是 C^∞ 映射. 如果

$$F \pitchfork S,$$

那么对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$(即对 Λ 中不属于某个零测集的所有的 λ),由式

$$F_\lambda(\cdot) = F(\lambda, \cdot)$$

定义的映射 $F_\lambda: M\to N$ 都与 S 横截,即

$$F_\lambda \pitchfork S.$$

证明 若定义这样一个 C^∞ 映射

$$I_\lambda: M\to\Lambda\times M,$$

$$p\mapsto(\lambda,p),$$

则有 $F_\lambda=F\circ I_\lambda$. 于是,根据引理 5.5 有

$$F_\lambda\pitchfork S \Longleftrightarrow I_\lambda\pitchfork F^{-1}(S).$$

我们用符号 π 表示从 $\Lambda\times M$ 到 Λ 的投射,并记

$$V_\lambda = I_\lambda(M) = \{\lambda\}\times M,\quad W = F^{-1}(S).$$

容易看到

$$F_\lambda\pitchfork S \Longleftrightarrow I_\lambda\pitchfork F^{-1}(S) \Longleftrightarrow V_\lambda\pitchfork W$$

$$\Longleftrightarrow (\pi|W)\pitchfork\lambda$$

(参看图 17).

根据 Sard 定理,几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$ 都是 C^∞ 映射 $(\pi|W): W\to\Lambda$ 的正则值. 因而几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$ 都使得

$$F_\lambda\pitchfork S.\qquad\Box$$

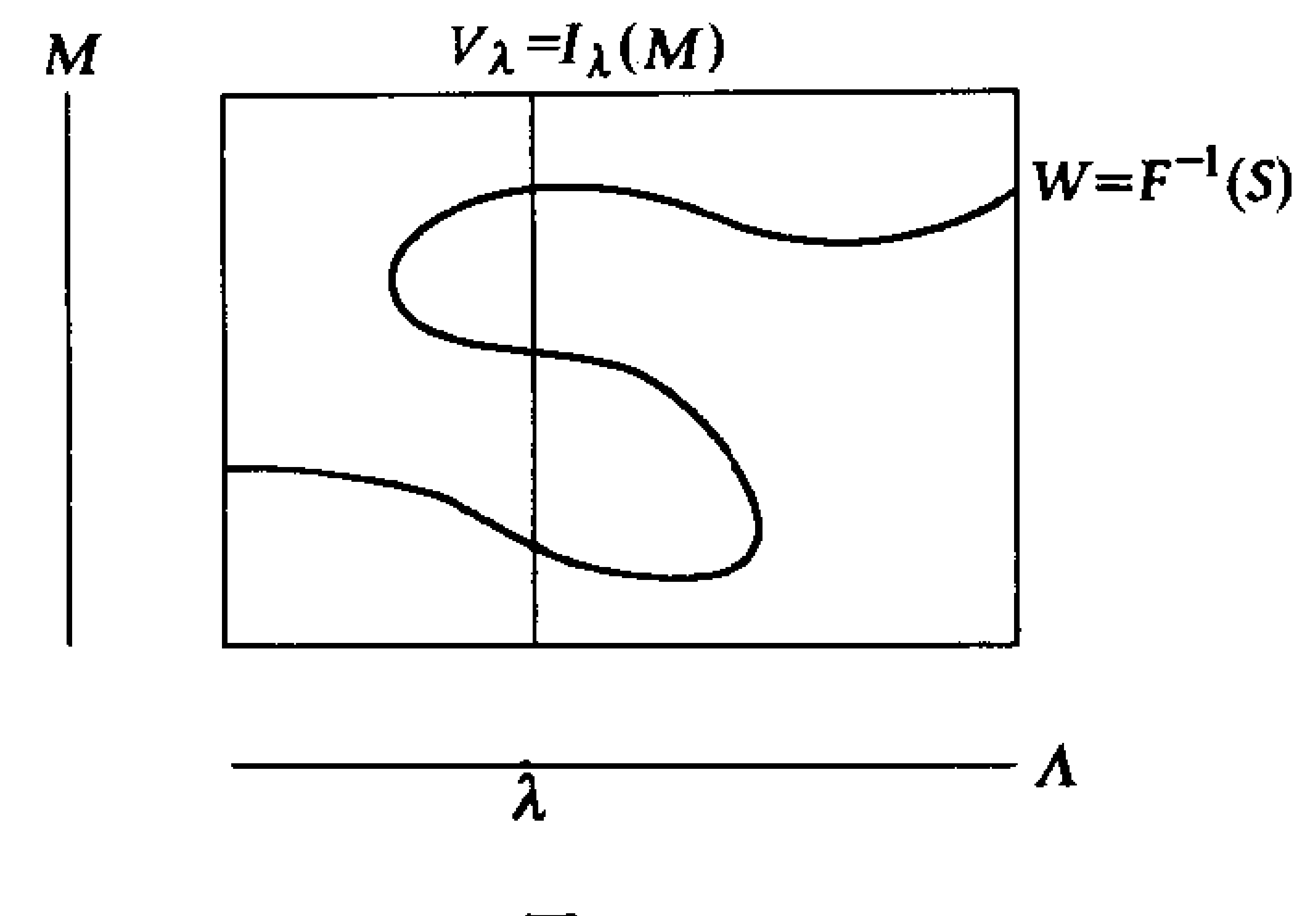


图 17

定理 5.7(含参数的横截性定理,带边情形) 设 Λ,M 和 N 是 C^∞ 流形,其中只有 M 是带边的.又设 S 是 N 的 C^∞ 正则子流形,$F:\Lambda\times M\to N$ 是 C^∞ 映射.如果

$$F\pitchfork S,\quad \partial F\pitchfork S,$$

那么对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$,由式 $F_\lambda(p)=F(\lambda,p)$ 所定义的映射 $F_\lambda:M\to N$ 都使得

$$F_\lambda\pitchfork S,\quad \partial F_\lambda\pitchfork S.$$

证明 我们注意到这样的事实:

$$\partial(\Lambda\times M)=\Lambda\times\partial M.$$

因为 $M\backslash\partial M$ 和 ∂M 都是无边流形,所以可对 $F|(\Lambda\times(M\backslash\partial M))$ 和 $\partial F=F|(\Lambda\times\partial M)$ 引用定理 5.6 的结论,从而完成本定理的证明. □

下面讨论关于带边流形的"横截逼近定理"和"横截扩张定理".为了避开某些细微末节尽快接触问题的实质,不妨假设 M 是紧致的带边流形(本讲义以后各章只涉及到这情形).这里所作的证明经过少许修改即可适用于更一般的情形(见后面的注记5.10).

定理 5.8(带边情形的横截逼近定理) 设 M 是紧致 C^∞ 带

边流形，N 是 C^∞ 无边流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，$f\in C^\infty(M,N)$. 则存在任意接近 f 的 $g\in C^\infty(M,N)$，满足条件

(1) $g \pitchfork S$, $\partial g \pitchfork S$,

(2) $g\sim f$.

证明 我们可以将 N 看成 $\boldsymbol{R}^k$ 的正则子流形($k=2\dim N+1$). 设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域，$\rho:\Omega\to N$ 是相应的收缩映射. 对于紧致集 $f(M)\subset N$，可以确定一个正实数 ε，使得

$$d(q,f(M))<\varepsilon\Rightarrow q\in\Omega.$$

设 Λ 是 $\boldsymbol{R}^k$ 中的开单位球，即 $\Lambda=\{\lambda\in\boldsymbol{R}^k \mid \|\lambda\|<1\}$. 我们定义这样一个 C^∞ 映射

$$G:\Lambda\times M\to N,$$
$$(\lambda,p)\mapsto\rho(f(p)+\varepsilon\lambda).$$

容易验证 G 是一个淹没映射，因而

$$G\pitchfork S.$$

根据定理 5.7，对几乎所有的 $\lambda\in\Lambda$，由式 $G_\lambda(p)=G(\lambda,p)$ 定义的映射 $G_\lambda:M\to N$ 都使得

$$G_\lambda\pitchfork S,\quad \partial G_\lambda\pitchfork S. \tag{5.4}$$

我们可以选取足够小的 $\lambda\in\Lambda$，使得(5.4)成立，并且使得 $g=G_\lambda:M\to N$ 充分接近于 f. 对这取定的 λ，显然

$$H(t,p)=\rho(f(p)+(1-t)\varepsilon\lambda)$$

定义了一个从 g 到 f 的同伦. □

定理 5.9(带边情形的横截扩张定理) 设 M 是紧致的 C^∞ 带边流形，K 是 M 的紧致子集，N 是 C^∞ 无边流形，S 是 N 的 C^∞ 正则子流形，并且是 N 的闭子集，$f\in C^\infty(M,N)$. 若 f 在 K 上与 S 横截，∂f 在 $K\cap\partial M$ 上与 S 横截，则存在可任意接近 f 的 $g\in C^\infty(M,N)$，使得

(0) $g|K=f|K$；

(1) $g \pitchfork S$, $\partial g \pitchfork S$；

(2) $g \sim f$.

证明 取 M 的开集 $U \supset K$，使得 f 在 U 上与 S 横截，∂f 在 $U \cap \partial M$ 上与 S 横截. 取闭包为紧致集的开集 V，使得

$$U \supset \overline{V} \supset V \supset K.$$

然后取 $\eta \in C^{\infty}(M, \boldsymbol{R})$，适合条件：

$$\begin{cases} 0 \leqslant \eta(p) \leqslant 1, & \forall p \in M, \\ \eta(p) = 0, & \forall p \in K, \\ \eta(p) = 1, & \forall p \in M \backslash V. \end{cases}$$

我们定义这样一个 C^{∞} 映射

$$G: \Lambda \times M \to N,$$
$$(\lambda, p) \mapsto \rho(f(p) + \varepsilon\eta(p)\lambda),$$

其中记号 Λ 和 ρ 的含义均如定理 5.8 的证明中所述.

往下，我们可以亦步亦趋地仿照定理 5.8 证明中的做法，完成本定理的证明. □

注记 5.10 定理 5.8 和定理 5.9 的陈述中要求 M 是紧致的. 但只要对证明的技术细节作一点修改，就可取消要求 M 紧致的限制. 修改中主要用到这样的事实（请读者自己予以证明）：

设 N 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的 C^{∞} 正则子流形，Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域（ρ 是相应的 C^{∞} 收缩映射），则存在正值 C^{∞} 映射 $\varepsilon: N \to \boldsymbol{R}$，使得对任何 $q \in N$ 都有

$$\{y \in \boldsymbol{R}^k \,|\, d(y, q) < \varepsilon(q)\} \subset \Omega.$$

基于上述事实，对于 M 不一定紧致的情形，仍可定义

$$G: \Lambda \times M \to N,$$
$$(\lambda, p) \mapsto \rho(f(p) + \varepsilon(f(p))\lambda).$$

于是，无须假定 M 紧致，仍可证明定理 5.8 的结论. 对定理 5.9 也可作类似的修改.

附录 γ Sard 定理的证明

引理 γ.1 如果闭区间 $I=[a,b]$ 被一族长度都不超过 δ 的开区间 $\{J\}$ 所覆盖，那么存在 $\{J\}$ 中有限个开区间 $J_1,\cdots,J_k$，使得

$$I\subset\bigcup_{i=1}^{k}J_i,\quad \sum_{i=1}^{k}|J_i|\leqslant 2(|I|+\delta).$$

证明 首先，不妨设 $\{J\}$ 由有限个开区间组成. 其次，有公共点的三个开区间当中，必有其中两个区间覆盖了第三个区间（有最小左端点的区间和有最大右端点的区间必定覆盖第三个区间）. 我们可以从 $\{J\}$ 中删除多余的开区间，使得任意一点 $x\in I$ 至多属于 $\{J\}$ 中的两个开区间，并且 I 的端点 a 和 b 各自只属于 $\{J\}$ 中的一个开区间.

删除了多余的开区间之后，剩下的有限个开区间 $J_1,\cdots,J_k$ 必定满足要求

$$I\subset\bigcup_{i=1}^{k}J_i,\quad \sum_{i=1}^{k}|J_i|\leqslant 2(|I|+\delta).\qquad\square$$

引理 γ.2 设 K 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧致集. 如果集合

$$K_t=K\cap(\{t\}\times\boldsymbol{R}^{n-1})$$

包含在 $\{t\}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ 的开集 $\{t\}\times W_t$ 之中，那么存在实数 $\alpha>0$，使得

$$K\cap((t-\alpha,t+\alpha)\times\boldsymbol{R}^{n-1})\subset(t-\alpha,t+\alpha)\times W_t\ .$$

（参看图 18）.

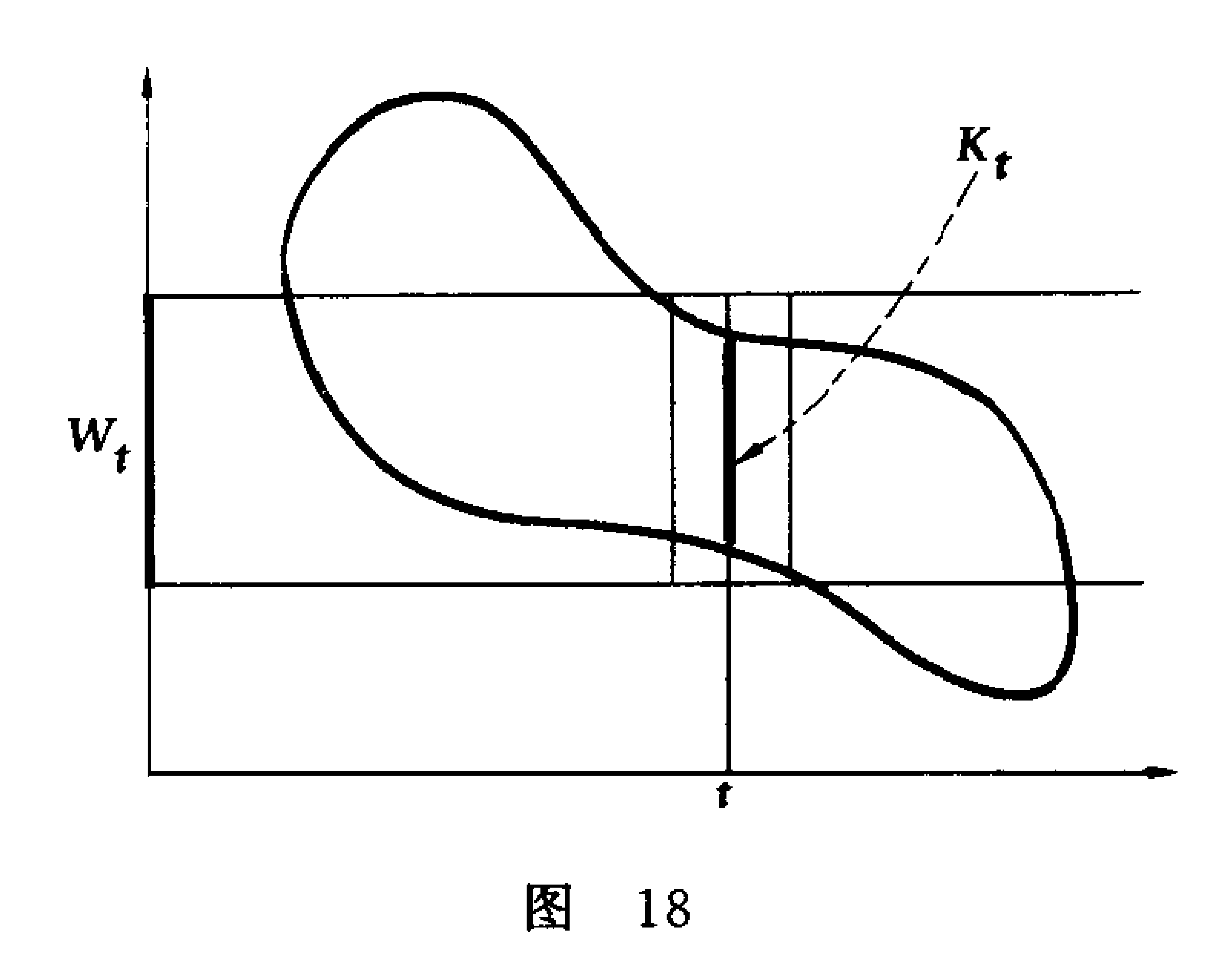


图 18

证明 连续函数

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)=|x_1-t|$$

在紧致集 $K\backslash(\boldsymbol{R}\times W_t)$ 上恒取正值,因而有正的下界 α,对这 α 有

$$K\cap((t-\alpha,t+\alpha)\times\boldsymbol{R}^{n-1})\subset(t-\alpha,t+\alpha)\times W_t\ .\quad\square$$

定理 Y.3(Fubini 定理的特殊情形) 设 $S\subset\boldsymbol{R}^n$ 是至多可数个紧致集的并集. 如果对任意的 $t\in\boldsymbol{R}$,截集

$$S_t=S\cap(t\times\boldsymbol{R}^{n-1})$$

都是 $t\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的零测集,那么 S 也是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集.

证明 只须对 $S=K$ 是紧致集的情形作出证明. 设 $\boldsymbol{R}$ 的闭区间 I 使得

$$K\subset I\times\boldsymbol{R}^{n-1}.$$

对任意的 $t\in I$,截集 $K_t=K\cap(t\times\boldsymbol{R}^{n-1})$是 $t\times\boldsymbol{R}^{n-1}$中的零测集. 因而对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\boldsymbol{R}^{n-1}$中的有限个开方体之并集 W_t,使得

$$K_t\subset t\times W_t,\quad |W_t|<\varepsilon.$$

根据引理 Y.2,存在开区间 $J_t=(t-\alpha_t,t+\alpha_t)(\alpha_t\in(0,1))$,使得

$$K\cap(J_t\times\boldsymbol{R}^{n-1})\subset J_t\times W_t.$$

根据引理 γ.1，从$\{J_t\}_{t\in I}$之中可选择有限个 J_{t_i}，使得

$$I\subset\bigcup_{i=1}^{k} J_{t_i},\quad \sum_{i=1}^{k}|J_{t_i}|\leqslant 2(|I|+2).$$

于是

$$K=K\cap(I\times \boldsymbol{R}^{n-1})\subset\bigcup_{i=1}^{k}(K\cap(J_{t_i}\times \boldsymbol{R}^{n-1}))$$

$$\subset\bigcup_{i=1}^{k}(J_{t_i}\times W_{t_i}),$$

$$\sum_{i=1}^{k}|J_{t_i}\times W_{t_i}|=\sum_{i=1}^{k}|J_{t_i}|\times|W_{t_i}|<\varepsilon\sum_{i=1}^{k}|J_{t_i}|$$

$$\leqslant 2\varepsilon(|I|+2).\qquad \square$$

引理 γ.4 设 V，W 和 N 是微分流形，$f:V\to N$ 是可微映射，$h:V\to W$ 是微分同胚，并设 $g=f\circ h^{-1}$，则有

(1) $x\in C(f)\Longleftrightarrow h(x)\in C(g)$；

(2) $f(C(f))=g(C(g))$.

证明 留作练习. $\square$

定理 γ.5(Sard 定理) 设 M 和 N 是 C^∞ 流形，$f:M\to N$ 是 C^∞ 映射，则 $f(C(f))$是 N 中的零测集. 因而几乎所有的 $q\in N$ 都是 f 的正则值.

证明 设 $\dim M=m$，$\dim N=n$. 对于 $m<n$ 的情形，我们知道 $f(M)$是 N 中的零测集，其子集 $f(C(f))$当然也是 N 中的零测集. 下面对 M 的维数 m 作归纳，以完成定理的证明. 因为任何(满足第二可数公理的)流形都可以表示成可数个局部坐标域的并集，所以不妨设 $M=U$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，$N=\boldsymbol{R}^n$.

记 $C=C(f)$. 并以 C_j 表示 U 中使得 f 的不超过 j 阶的所有偏导数都取 0 值的那些点 x 的集合. 显然有

(γ.1) $$C\supset C_1\supset C_2\supset\cdots\supset C_k;$$

(γ.2) $$f(C)=f(C\backslash C_1)\cup f(C_1\backslash C_2)\cup\cdots\cup f(C_{k-1}\backslash C_k)\cup f(C_k).$$

我们将证明：

(1) $f(C\backslash C_1)$是零测集；

(2) $f(C_{j-1}\backslash C_j)$是零测集，$j=2,3,\cdots$；

(3) 存在自然数 k，使得 $f(C_k)$是零测集.

(1)的证明. 设 a 是 $C\backslash C_1$ 中的任意一点. 不妨设

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) \neq 0.$$

考察这样一个映射

$$h:(x_1,\cdots,x_m) \mapsto (f_1(x),x_2,\cdots,x_m).$$

因为 $\mathrm{D}h(a)$的秩为 m，所以存在 $\boldsymbol{R}^m$ 中 a 点的开邻域 V 和 $h(a)$ 点的开邻域 W，使得 $h|V$ 是从 V 到 $W=h(V)$的光滑微分同胚. 我们定义

$$g = f \circ h^{-1}:W \to \boldsymbol{R}^n.$$

因为 $C\backslash C_1$ 可以用可数个这样的 V 覆盖，所以只须证明

$$f((C\backslash C_1)\cap V) = g(h((C\backslash C_1)\cap V))$$

是零测集. 证明这一事实要用到引理 γ. 3. 须指出 $f((C\backslash C_1)\cap V)$是至多可数个紧致集的并集. 事实上，开集

$$(\boldsymbol{R}^n\backslash C_1)\cap V$$

是至多可数个紧致集的并集. 闭集 C 与之的交集当然也是，而

$$(C\backslash C_i)\cap V = C\cap((\boldsymbol{R}^n\backslash C_1)\cap V).$$

由此得知 $f((C\backslash C_i)\cap V)$是至多可数个紧致集的并集.

借助于交换图表(图 19)，容易看出在 W 上映射 g 具有如下形式：

$$g(z_1,\cdots,z_m) = (z_1,g_2(z),\cdots,g_n(z)).$$

这可以写成

$$g(t,\zeta) = (t,g_2(t,\zeta),\cdots,g_n(t,\zeta)),$$

其中 $\zeta=(z_2,\cdots,z_m)$. 如果用 g^t 表示这样一个从 $W\cap(t\times\boldsymbol{R}^{m-1})$

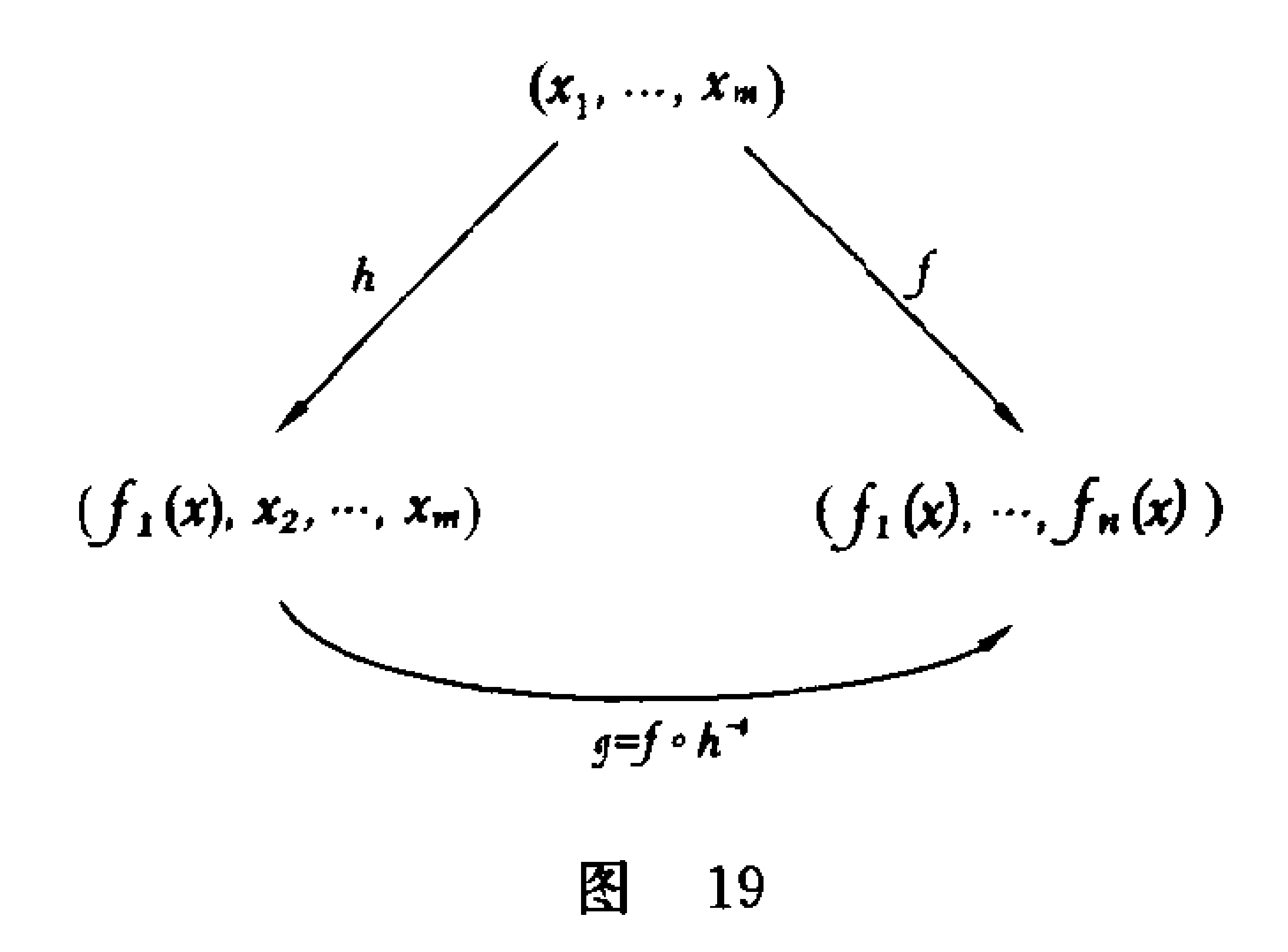


图 19

到 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 的映射：

$$g^t(\zeta) = (g_2(t,\zeta), \cdots, g_n(t,\zeta)),$$

则有

$$\mathrm{D}g(t,\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \mathrm{D}g^t(\zeta) \end{bmatrix}.$$

从 g 和 $\mathrm{D}g$ 的表示式可以看出，对于 $E=h((C\setminus C_1)\cap V)\subset W$ 应有

$$(g(E))_t = g(E_t)\subset t \times g^t(C(g^t)).$$

依据归纳假设，$g^t(C(g^t))$ 是 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的零测集，因而 $(g(E))_t$ 是 $t\times \boldsymbol{R}^{n-1}$ 中的零测集. 于是，根据引理 γ. 3 可以断定 $g(E)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 即 $f((C\setminus C_1)\cap V)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 这证明了(1).

(2)的证明. 对于 $a\in C_{j-1}\setminus C_j$，不妨设

$$\frac{\partial^j f_1}{\partial x_1 \partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}}(a) \neq 0.$$

若记

$$\eta(x) = \frac{\partial^{j-1} f_1}{\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}}(x),$$

则有

(γ.3) $$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(a) \neq 0,$$

(γ.4) $$\eta(x) = 0, \quad \forall x \in C_{j-1} \backslash C_j.$$

考察映射

$$h : (x_1, \cdots, x_m) \mapsto (\eta(x), x_2, \cdots, x_m).$$

由(γ.3)可知，存在 $\boldsymbol{R}^m$ 中 a 点的开邻域 V 和 $h(a)$点的开邻域 W，使得 $h|V$ 是从 V 到 $W=h(V)$的 C^∞同胚. 仍记 $g=f\circ h^{-1}$. 再来考察从 $W\cap(0\times\boldsymbol{R}^{m-1})$到 $\boldsymbol{R}^n$ 的映射

$$g^0(\zeta) = g(0,\zeta).$$

按照归纳假设，$g^0(C(g^0))$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 由(γ.4)可知

$$h((C_{j-1}\backslash C_j)\cap V) \subset W \cap (0 \times \boldsymbol{R}^{m-1}),$$

$$f((C_{j-1}\backslash C_j)\cap V) = g(h((C_{j-1}\backslash C_j)\cap V)) \subset g^0(C(g^0)).$$

因而 $f((C_{j-1}\backslash C_j)\cap V)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 这证明了(2).

(3)的证明. 将证明：$k > \frac{m}{n} - 1$ 时，$f(C_k)$是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的零测集. 为此，只须对任意的 m 维闭方体 $P\subset U$，证明 $f(P\cap C_k)$是零测集.

对于 $x_0 \in P\cap C_k$ 和任意的 $x\in P$，我们有

(γ.5) $$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant b\|x - x_0\|^{k+1},$$

这里 b 是一个实常数. 设 Q 是包含在 P 中的边长为 δ 的 m 维闭方体，满足条件 $Q\cap C_k \neq \varnothing$. 则由估计式(γ.5)可知，$Q$ 的像集 $f(Q)$包含在这样一个 n 维闭方体之中，该闭方体的边长 Δ 满足不等式

$$\Delta \leqslant B\delta^{k+1},$$

其中的 B 是与 b 有关的一个实常数. 于是，对该闭方体的体积有估计式

(γ.6) $$\Delta^n \leqslant B^n \delta^{(k+1)n}.$$

设 P 的边长是 λ，并设 L 是待定的充分大的自然数．我们把 P 的各条棱都等分成 L 段（每段的长度为 $\delta=\lambda/L$）．然后考察 P 被平行分割成的 L^m 个小正方体．设 Q 是这些小正方体当中与 C_k 相交的任意一个．则像集 $f(Q)$ 的体积可以用（γ.6）加以估计．由此得知，$f(P\cap C_k)$ 包含在不多于 L^m 个小正方体的并集之中，这些小正方体的总体积不超过

$$L^m B^n\left(\frac{\lambda}{L}\right)^{(k+1)n}=B^n\lambda^{(k+1)n}L^{m-(k+1)n}.$$

如果 $k>\frac{m}{n}-1$，即 $(k+1)n>m$，那么我们总可以选取足够大的 L，使得

$$B^n\lambda^{(k+1)n}L^{m-(k+1)n}<\varepsilon.$$

至此，我们证明了论断（1），（2）和（3），从而就完成了 Sard 定理的证明． □

注记 γ.6 在上面证明的第（3）部分中，我们利用 Taylor 展式得到估计（γ.5）．表面上看，似乎这一证明对 f 的要求可以从 C^∞ 减弱到 C^r，只要 $r=k+1>m/n$．但这种看法是不正确的．因为综观整个证明，我们采取的是归纳证法，而在归纳过程中对 r 的要求是会改变的．

练　习　E

E.1. 设 M 是连通的光滑流形．如果 $f\in C^r(M,\mathbf{R})$（$r\geqslant 1$）适合条件 $C(f)=M$，那么 f 是常值函数．

E.2. 设 M 和 N 是 C^r 流形（$r\geqslant 1$，M 带边，N 不带边），$f: M\to N$ 是 C^r 映射，$\partial f=f|\partial M$．试证：$C(\partial f)\supset C(f)\cap\partial M$．

E.3. 设 M 是无边 C^∞ 流形，$f: M\to\mathbf{R}$ 是 C^∞ 映射，b 是 f 的正则值．如果存在 $p\in M$，使得 $f(p)>b$，那么 $W=\{p\in M|f(p)\geqslant b\}$ 是 C^∞ 带边流形，并且 $\partial W=\{p\in M|f(p)=b\}$．

E. 4. 试举出反例说明：对于 C^∞ 映射 $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ 和 $q\in\boldsymbol{R}$，集合 $f^{-1}(q)$ 可以不是 $\boldsymbol{R}^2$ 的子流形.

E. 5. 试举出这样的例子：$f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R})$，$q\in f(C(f))$，但 $S=f^{-1}(q)$ 却是 $\boldsymbol{R}^2$ 的正则子流形.

E. 6. 举出这样的例子：$f\in C^\infty(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ 并且 $f(C(f))$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密.

E. 7. 试举出这样的例子：S 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的光滑正则子流形，$f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2,\boldsymbol{R}^3)$ 不与 S 横截，但 $f^{-1}(S)$ 却是 $\boldsymbol{R}^2$ 的一维正则子流形.

E. 8. 设 M 是全体 $n\times n$ 实数方阵的集合，赋有等同于 n^2 维 Euclid 空间的拓扑结构与流形结构. 又设 N 是全体 $n\times n$ 对称实数方阵的集合，赋有等同于 $n(n+1)/2$ 维 Euclid 空间的拓扑结构与流形结构. 映射 $f:M\to N$ 定义为 $f(A)=A\cdot A^{\mathrm{T}}$，其中 A^{T} 是 A 的转置方阵.

(1) 试证 n 阶单位方阵 I 是映射 f 的正则值，因而 $f^{-1}(I)$ 是 M 的光滑的正则子流形. 试计算 $f^{-1}(I)$ 的维数.

(2) 试证 $f^{-1}(I)$ 是紧致的.

(3) 容易看出：$f^{-1}(I)$ 是 n 阶正交方阵的集合 $O(n)$. 试利用上面的讨论，说明 $O(n)$ 是一个紧致李群.

E. 9. (1) 设 V 和 W 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的线性子空间. 如果 $\dim V+\dim W=n$，那么

$$V\pitchfork W\Longleftrightarrow V\cap W=\{0\}.$$

(2) 设 V 是实线性空间，Δ 是 $V\times V$ 的"对角线"子空间，$A:V\to V$ 是线性映射，并设 $\Gamma=\{(\xi,A\xi)\mid\xi\in V\}$. 试证

$$\Gamma\pitchfork\Delta\Longleftrightarrow 1\text{ 不是 }A\text{ 的本征值}.$$

第六章　向量场与流,Morse 函数

§1　向量场与流

设 M 是一个 C^r 流形($r\geqslant 1$). 切丛 TM 的任何一个 C^k 截面($0\leqslant k\leqslant r-1$)被称为一个 C^k 向量场. 换言之, M 的 C^k 向量场 Γ 是这样一个 C^k 映射

$$\Gamma: M\to TM,$$

它使得

$$\Gamma(p)\in T_pM,\quad \forall p\in M.$$

设 $\dim M=m$. 对于 M 的任意一个局部坐标图卡 (U,φ), 向量场 $\Gamma|U$ 可以表示为

$$\Gamma(\varphi^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{m}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \forall x\in\varphi(U).$$

于是,Γ 局部表示成 $\varphi(U)$上的向量场

$$\xi(x) = (\xi_1(x),\cdots,\xi_m(x)).$$

在本书中,我们所涉及的主要是 C^∞ 向量场.

在第一章里,我们把流形上某点的切向量定义为"在该点相切的曲线的等价类". 设 M 是一个 m 维的 C^∞流形, J 是任意一个实数区间. 考察 C^∞映射

$$\gamma: J\to M.$$

这样一个映射 γ 常被称为 M 上的一条 C^∞ 曲线(或光滑曲线). 曲线 γ 在它所经过的每一点 $\gamma(t_0)$决定了 $T_{\gamma(t_0)}M$ 中的一个切向量,我们约定把这切向量记为 $\dot\gamma(t_0)$. 更确切地说,$\dot\gamma(t_0)$就是由曲线

$$\delta(t) = \gamma(t_0 + t)$$

在 $t=0$ 处所决定的切向量. 如果选定 M 在 $\gamma(t_0)$ 点邻近的一个局部坐标图卡 (U,φ)，那么切向量 $\dot{\gamma}(t_0)$ 可以表示为

$$\dot{\gamma}(t_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t_0)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中 $x_i(t)$ 是 $x(t)=\varphi\circ\gamma(t)$ 的第 i 个分量 $(i=1,\cdots,m)$：

$$x(t) = \varphi\circ\gamma(t) = (x_1(t),\cdots,x_m(t)).$$

定义 1.1 设 M 是一个 m 维 C^∞ 流形，Γ 是 M 上的一个 C^∞ 向量场，而 $\gamma: J\to M$ 是一条 C^∞ 曲线. 如果

(1.1) $$\dot{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t)),\quad \forall t\in J,$$

那么我们就说 γ 是向量场 Γ 的一条**积分曲线**.

在定义 1.1 的假定条件下，设 (U,φ) 是 M 的一个局部坐标图卡，并设 $\gamma(J)\subset U$. 我们记

$$x(t) = (x_1(t),\cdots,x_m(t)) = \varphi\circ\gamma(t).$$

在这样的约定下，$\dot{\gamma}$ 和 Γ 分别表示成

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t)\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \Gamma(\varphi^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{m}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

于是(1.1)式可以表示成

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \xi_i(x(t)),\quad i=1,\cdots,m,$$

或者

(1.2) $$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \xi(x(t)),$$

其中 $\xi(x)=(\xi_1(x),\cdots,\xi_m(x))$.

我们看到，通过局部坐标表示，(1.1)局部地化成了常微分方程组(1.2).

引理 1.2 设 M 是一个 m 维 C^∞ 流形，Γ 是 M 上的一个

C^{∞}向量场. 考察这样一个 Cauchy 问题

$$(1.3)\qquad \begin{cases}\dot{\gamma}(t) = \Gamma(\gamma(t)),\\ \gamma(0) = p.\end{cases}$$

可以断定,对任意的 $p_0 \in M$,存在 p_0 点的开邻域 V, W 和正实数 ε,使得

(1) 对于点 $p \in V$ 和 $J = [-\varepsilon, \varepsilon]$,Cauchy 问题(1.3)的解 $\gamma(t,p)$在 $t \in J$ 范围内存在而且惟一;

(2) $\gamma(t,p)$定义了一个从 $J \times V$ 到 M 的光滑映射;

(3) $\gamma(J \times W) \subset V$.

证明 选取 p_0 点邻近的局部坐标图卡(U,φ), 使得

$$\varphi(p_0) = 0, \quad \varphi(U) = B_4,$$

并记

$$K = \overline{B}_3, \quad V = \varphi^{-1}(B_2), \quad W = \varphi^{-1}(B_1).$$

于是,(1.3)局部表示成

$$(1.4)\qquad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \xi(x),\\ x(0) = a.\end{cases}$$

常微分方程理论的有关定理保证了 Cauchy 问题(1.4)的解的局部存在惟一性. 这里只须说明: 对于某个实数 $\varepsilon > 0$ 和所有的 $a \in B_2$,问题(1.4)的解至少在 $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$的范围内存在. 为此,我们记

$$b = \sup_{x \in K}\{\|\xi(x)\|, \ \|\mathrm{D}\xi(x)\|\}.$$

然后考察与(1.4)等价的积分方程组

$$(1.5)\qquad x(t) = a + \int_0^t \xi(x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

设算子 A 是这样定义的:

$$(Ax)(t) = a + \int_0^t \xi(x(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

如果 J 是包含 0 的闭区间，$a\in B_2$，并且

$$x(t),\ y(t)\in K,\quad \forall t\in J,$$

那么对于 $t\in J$ 显然有

$$\|(Ax)(t)-a\|\leqslant b|t|,$$

$$\|(Ax)(t)-(Ay)(t)\|\leqslant b|t|\sup_{\tau\in J}\|x(\tau)-y(\tau)\|.$$

我们取 $\varepsilon\in(0,1/b)$，并记 $J=[-\varepsilon,\varepsilon]$. 然后从 $x^{(0)}(t)\equiv a$ 开始，定义迭代序列

$$(1.6)\qquad x^{(n)}(t)=(Ax^{(n-1)})(t),\quad t\in J,\quad n=1,2,\cdots.$$

利用上面得到的估计式，很容易证明序列(1.6)是一致收敛的. 该序列的极限函数是(1.5)在 $t\in J$ 范围内的解. 至此，我们已经证明了：对于 $a\in B_2$，问题(1.4)的解至少在 $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$的范围内存在.

根据常微分方程的有关定理，问题(1.4)的解 $x(t,a)$是惟一的，并且 $x(t,a)$定义了一个从 $J\times B_2$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 中的光滑映射. 还容易验证

$$x(J\times B_2)\subset B_3,\quad x(J\times B_1)\subset B_2.$$

返回到流形 M，我们已完成了引理的证明. □

引理 1.3 条件和记号的约定皆同引理 1.2. 如果 $p\in W$ 并且

$$|s|+|t|<\varepsilon,$$

那么就有

$$\gamma(t,\gamma(s,p))=\gamma(t+s,p),$$

因而有

$$\gamma(t,\gamma(s,p))=\gamma(s,\gamma(t,p)).$$

证明 我们记 $\delta(t)=\gamma(t+s,p)$. 容易看出，这样定义的 δ 使得

$$\begin{cases}\dot{\delta}(t)=\Gamma(\delta(t)),\\ \delta(0)=\gamma(s,p).\end{cases}$$

因为 $p\in W$，所以 $\gamma(s,p)\in V$. 根据引理 1.2 中的惟一性论断，应该有

$$\delta(t)=\gamma(t,\gamma(s,p)).$$

这就是 $$\gamma(t+s,p)=\gamma(t,\gamma(s,p)). \quad \square$$

定义 1.4 设 Γ 是 M 上的向量场. 我们把集合

$$\operatorname{supp}\Gamma=\overline{\{x\in M\mid \Gamma(x)\neq 0\}}$$

叫做 Γ 的**支集**. 若 $\operatorname{supp}\Gamma$ 是紧致的，则称 Γ 为**紧支向量场**.

定理 1.5 设 M 是光滑流形，Γ 是 M 上的紧支光滑向量场，则存在光滑映射

$$\gamma: \boldsymbol{R}\times M\to M$$

使得 $\gamma(t,p)$ 是以下 Cauchy 问题的惟一解：

$$(1.7)\qquad \begin{cases}\dot{\gamma}(t,p)=\Gamma(\gamma(t,p)),\\ \gamma(0,p)=p.\end{cases}$$

(这样的 γ 被称为：由向量场 Γ 生成的流)还可断定

$$\gamma(t,p)\equiv p,\quad \forall p\in M\backslash\operatorname{supp}\Gamma.$$

并且，如果记 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$，那么

$$\gamma_t: M\to M\quad (t\in\boldsymbol{R})$$

是 M 的一个单参数变换群. 这就是说，光滑映射 γ 所产生的映射族 $\{\gamma_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ 能够满足以下两个条件：

(0) $\gamma_0=\mathrm{id}$(M 的恒同变换)；

(1) $\gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s}$，$\forall t,\ s\in\boldsymbol{R}$.

证明 记 $H=\operatorname{supp}\Gamma$. 对每一点 $p_0\in H$，都有满足引理 1.2 要求的开邻域 V_{p_0}，W_{p_0} 和正实数 $\varepsilon(p_0)$. 因为 H 是紧致集，所以存在有限个点 $p_1,\cdots,p_N$，使得 $W_{p_1}\cup\cdots\cup W_{p_N}\supset H$. 我们记

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon(p_i)\mid i=1,\cdots,N\},\quad J=[-\varepsilon,\varepsilon].$$

根据引理 1.2，存在光滑映射

$$\gamma^{(i)}: J\times V_{p_i}\to M,$$

使得对于 $p\in V_{p_i}$，问题(1.7)在 $t\in J$ 范围内的惟一解是 $\gamma^{(i)}(t,p)$，并且

$$\gamma^{(i)}(J\times W_{p_i})\subset V_{p_i}.$$

根据该引理的惟一性论断，我们看到

(a) 如果 $V_{p_i}\cap V_{p_j}\neq\varnothing$，那么对于 $p\in V_{p_i}\cap V_{p_j}$ 和 $t\in J$ 有

$$\gamma^{(i)}(t,p)=\gamma^{(j)}(t,p);$$

(b) 如果 $V_{p_k}\cap(M\setminus H)\neq\varnothing$，那么对于 $p\in V_{p_k}\cap(M\setminus H)$ 和 $t\in J$ 有

$$\gamma^{(k)}(t,p)=p.$$

于是，在 M 上可以无歧义地定义这样一个映射

$$(1.8)\qquad \gamma(t,p)=\begin{cases}\gamma^{(i)}(t,p), & \forall p\in W_{p_i},\\ p, & \forall p\in M\setminus H.\end{cases}$$

容易看出，由(1.8)定义的 $\gamma: J\times M\to M$ 是一个光滑映射，该映射具有这样的性质：如果 $|t|+|s|<\varepsilon$，那么

$$(1.9)\qquad \gamma(t,\gamma(s,p))=\gamma(t+s,p).$$

分别考察 $p\in W_{p_i}$ 和 $p\in M\setminus H$ 的情形，可以很容易地验证上述性质. 如果记 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$，那么(1.9)式可以写成

$$(1.10)\qquad \gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s}\quad(|t|+|s|<\varepsilon).$$

以(1.10)式为起始点，用归纳法可以证明：如果 $|t_1|+|t_2|+\cdots+|t_k|<\varepsilon$，那么就有

$$(1.11)\qquad \gamma_{t_1}\circ\gamma_{t_2}\circ\cdots\circ\gamma_{t_k}=\gamma_{t_1+t_2+\cdots+t_k}.$$

下面，我们将利用这一重要性质，设法将 $\gamma: J\times M$ 的定义范围扩展到 $\boldsymbol{R}\times M$.

对于任意的 $t\in\boldsymbol{R}$，取 $n\in\boldsymbol{N}$，使得

$$(1.12)\qquad |t/n|<\varepsilon/2.$$

然后扩充定义

$$(1.13)\qquad \gamma(t,p)=\gamma_{t/n}\circ\gamma_{t/n}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n}(p)$$

(等号右端是 $\gamma_{t/n}$的 n 重复合). 请注意,这样的定义不依赖于 $n\in N$ 的具体选择(只要条件(1.12)得以满足). 事实上,假若 $n'\in N$也使得 $|t/n'|<\varepsilon/2$, 那么就有

$$\gamma_{t/n}\circ\gamma_{t/n}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n}=\gamma_{t/(nn')}\circ\gamma_{t/(nn')}\circ\cdots\circ\gamma_{t/(nn')}$$
$$=\gamma_{t/n'}\circ\gamma_{t/n'}\circ\cdots\circ\gamma_{t/n'}.$$

上式中的三个复合映射的复合重数依次为 n,nn' 和 n'.

容易看出,由(1.13)定义的 $\gamma:\boldsymbol{R}\times M\to M$ 是光滑映射,并且 $\gamma_t(p)=\gamma(t,p)$具有良好的性质:

(0) $\gamma_0=\mathrm{id}$;

(1) $\gamma_t\circ\gamma_s=\gamma_{t+s},\ \forall t,s\in\boldsymbol{R}$.

利用关系式 $\gamma(t+t_0,p)=\gamma(t,\gamma(t_0,p))$,我们得到

$$\dot{\gamma}(t_0,p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t,\gamma(t_0,p))\bigg|_{t=0}=\Gamma(\gamma(t_0,p)).$$

另外,根据引理 1.2,很容易验证: $\gamma(t,p)$是问题(1.7)的惟一解. □

注记 1.6 设 $\gamma_t:M\to M$ 定义为

$$\gamma_t(\cdot)=\gamma(t,\cdot).$$

则容易看出,每个 γ_t 都具有光滑的逆映射 γ_{-t},因而 $\gamma_t:M\to M$ 是光滑同胚. 这是一种构造微分同胚的非常有效的办法.

§2 流形的匀齐性

同以前一样,我们约定记 $B_r=\{x\in\boldsymbol{R}^m\,|\,\|x\|<r\}$.

引理 2.1 对任意的 $p,q\in B_1$,存在光滑映射

$$\gamma:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$$

适合以下这些条件：

(1) $\gamma_t(\cdot)=\gamma(t,\cdot):\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ 是光滑同胚，并且 $\gamma_0=\mathrm{id}$；

(2) $\gamma_t(x)=x,\ \forall x\in\boldsymbol{R}^m\backslash B_4$；

(3) $\gamma_1(p)=q$.

证明 取光滑函数 $\eta:\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}$，满足如下条件：

(a) $0\leqslant\eta(x)\leqslant 1,\ \forall x\in\boldsymbol{R}^m$；

(b) $\eta(x)=1,\ \forall x\in\overline{B}_3$；

(c) $\operatorname{supp}\eta\subset B_4$.

我们定义 $\boldsymbol{R}^m$ 上的紧支向量场

$$\Gamma(x)=\eta(x)(q-p),$$

然后求解 Cauchy 问题

$$(2.1)\qquad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\Gamma(\gamma),\\ \gamma(0)=a.\end{cases}$$

这等价于求解

$$(2.2)\qquad \gamma(t,a)=a+\int_0^t\eta(\gamma(\tau,a))(q-p)\mathrm{d}\tau.$$

我们已经知道(2.1)(或(2.2))的解是存在并且惟一的，现在的问题是：需要对 $a\in B_1$ 和 $t\in J=[-1,1]$求出解的具体表示式. 为此，先利用(2.2)作如下的估计：

$$\|\gamma(t,a)\|\leqslant\|a\|+|t|\cdot\|q-p\|<3.$$

由此可知，对于 $a\in B_1$ 和 $t\in J=[-1,1]$ 有

$$\gamma(t,a)=a+\int_0^t(q-p)\mathrm{d}\tau.$$

也就是

$$(2.3)\qquad \gamma(t,a)=a+t(q-p),\ \forall a\in B_1,\ t\in J=[-1,1].$$

设 $\gamma:\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^m$ 是由如上定义的向量场 Γ 所决定的光滑流. 我们指出：γ 满足引理的全部要求. 显然(1)和(2)是成立的，只

有(3)尚须验证. 由(2.3)式可得

$$\gamma_1(x) = x + (q - p), \quad \forall\, x \in B_1.$$

因而 $\gamma_1(p)=q$. □

下面的定理揭示了连通流形的匀齐性质.

定理 2.2 设 M 是光滑流形, M_0 是 M 的任意一个连通开集, p 和 q 是 M_0 中的任意两点. 则存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M \to M$, 使得

(1) $h(p)=q$;

(2) $h(x)=x$, $\forall x \in M \backslash M_0$.

特别地, 如果 M 自身是连通的, 那么对于 M 的任意两点 p 和 q, 存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M \to M$, 使得

$$h(p) = q.$$

证明 对于 M_0 的任意两点 a 和 b, 如果存在同伦于 id 的光滑同胚 $k=k_{b,a}: M \to M$, 使得

(a) $k(a)=b$;

(b) $k(x)=x$, $\forall x \in M \backslash M_0$,

那么我们就约定记

$$a \sim b.$$

容易看到, 这样定义的"$\sim$"是 M_0 的点之间的一种等价关系(练习 F.3), 因而 M_0 是互不相交的等价类的并集. 根据引理 2.1 可以判定: 由关系"$\sim$"所决定的每一个等价类都是一个开集. 因为 M_0 是连通集, 所以只能有单独一个等价类. 因而 M_0 的任意两个点 p 和 q 相互等价, 即 $p \sim q$. □

推论 2.3 设 M 是连通的光滑流形, 其维数 $\dim M = m \geqslant 2$. 则对于任意的 $p_1, \cdots, p_n \in M$ 和 $p, q \in M \backslash \{p_1, \cdots, p_n\}$, 存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M \to M$, 使得

$$h(p) = q; \quad h(p_i) = p_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

证明 容易看出: $M_0 = M \backslash \{p_1, \cdots, p_n\}$ 是 M 中的连通开

集. □

定理 2.4 设 M 是连通的光滑流形，其维数 $\dim M = m \geqslant 2$. 则对于 M 中互不相同的点 $p_1,\cdots,p_n$ 和 $q_1,\cdots,q_n$，存在同伦于 id 的光滑同胚 $h: M \to M$，使得

$$h(p_i) = q_i, \quad i = 1,\cdots,n.$$

证明 根据推论 2.3，对每一个 $i\in\{1,\cdots,n\}$，存在同伦于 id 的光滑同胚 $h_i: M\to M$，使得

(1) $h_i(p_i)=q_i$;

(2) $h_i(q_j)=q_j$, $\forall j<i$;

(3) $h_i(p_k)=p_k$, $\forall k>i$.

我们定义

$$h = h_n \circ h_{n-1} \circ \cdots \circ h_1.$$

容易验证：这样的 h 满足定理的要求. □

§3 带边流形的领圈邻域与倍流形

展开讨论之前，再一次提请注意一些事项. 设 $r\geqslant 1, E\subset \boldsymbol{R}^k$（$E$ 不必是 $\boldsymbol{R}^k$ 的开子集），考察映射 $f: E\to \boldsymbol{R}^l$. 当且仅当存在 $\boldsymbol{R}^k$ 的开子集 $G\supset E$ 使得 f 可扩充为 $\tilde{f}\in C^r(G,\boldsymbol{R}^l)$（$\tilde{f}|E=f$），才认为 $f: E\to\boldsymbol{R}^l$ 是 C^r 映射. 另外，我们约定记

$$\boldsymbol{R}_+^{1+n} = \{(u^0,u^1,\cdots,u^n)\in \boldsymbol{R}^{1+n} \mid u^0 \geqslant 0\}.$$

设 M 是带边流形，$\dim M = 1+n$. 应当指出：对于 $p\in\partial M$，M 在该点的切空间 T_pM 是完整的 $1+n$ 维线性空间（并非半个空间）. 事实上，虽然 p 点邻近的局部坐标域同胚于半空间 $\boldsymbol{R}_+^{1+n}$ 的开集，但过 p 点不与 $T_p(\partial M)$ 相切的曲线仍有两种可能的参数方向. 第一种是远离边缘点 p 的：

$$\begin{cases}\alpha: [0,\varepsilon] \to M, \\ \alpha(0) = p \in \partial M;\end{cases}$$

另一种是趋向边缘点 p 的：

$$\begin{cases}\beta: (-\eta,0] \to M, \\ \beta(0) = p \in \partial M.\end{cases}$$

约定将任何一条第一种类型的曲线所决定的属于 $(T_pM)\backslash(T_p(\partial M))$ 的切向量称为是“**内指向型**”的切向量.（类似地，可以定义“**外指向型**”的切向量.）

设 $p \in \partial M$ 是给定点. p 点邻近 M 的局部坐标图卡 (U,φ) 相应导出切向量的局部坐标映射 φ_*（参看第一章 §5). 切向量 $\xi \in T_qM(q \in U)$ 属“**内指向型**”的充分必要条件是：

$$\varphi_*^0(\xi) > 0.$$

这里 φ_*^0 是

$$\varphi_*(\cdot) = (\varphi_*^0(\cdot), \varphi_*^1(\cdot), \cdots, \varphi_*^n(\cdot))$$

的第一个分量函数.

引理 3.0 设 M 是 C^∞ 带边流形. 则在 ∂M 的某个开邻域上，可以定义一个 C^∞ 切向量场 σ，该切向量场在所有边缘点 $p \in \partial M$ 处的切向量 $\sigma(p)$ 都是内指向型的.

证明 首先指出：对任何一点 $p \in \partial M$，存在 p 点的开邻域 U 和在 U 上定义的 M 的局部切向量场，该切向量场在 $U \cap \partial M$ 的所有各点处的切向量都是内指向型的. 事实上，设 (U,φ) 是 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡，则由

$$\varphi_*^{-1}(1,0,\cdots,0)$$

所给出的局部切向量场在各边缘点处当然都是内指向的.

其次，我们注意到，在各边缘点处，内指向型的切向量乘以正实数所得到的切向量仍属同一类型. 在同一个边缘点处的若干个内指向型的切向量之和仍然是该点处的一个内指向型切

向量.

我们可以选择覆盖了 ∂M 的 M 的局部坐标域. 在这些局部坐标域分别定义局部切向量场，要求在所有边缘点处的切向量都是内指向型的. 然后选取从属于这些局部坐标域以及开集 $M\backslash\partial M$的 M 的单位分解. 我们用从属于所述局部坐标域的单位分解函数将定义于这些局部坐标域的局部切向量场粘接起来，这样做成一个在包含 ∂M 的一个开集上有定义的切向量场. 该切向量场在所有边缘点处的切向量当然都是内指向型的. □

定理 3.1 设 M 是紧致光滑的带边流形，σ 是定义于 ∂M 的某个开邻域上的切向量场，该切向量场在所有边缘点处的切向量都是内指向的. 考察 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dot{\gamma}(t)=\sigma(\gamma(t)),\\ \gamma(0)=p.\end{cases}\tag{3.1}$$

可以肯定：存在 $\varepsilon>0$，使得(3.1)的解 $\gamma(t,p)$对所有的

$$(t,p)\in[0,\varepsilon)\times\partial M$$

有定义；并且存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$，使得

$$\gamma\big|[0,\delta)\times\partial M:[0,\delta)\times\partial M\rightarrow M$$

是从$[0,\delta)\times\partial M$ 到 M 的某个包含 ∂M 的开集 Δ 的 C^{∞}同胚.

注记 通常将作为$[0,\delta)\times\partial M$ 的光滑同胚像的 M 的开集

$$\Delta=\gamma([0,\delta)\times\partial M)\supset\partial M$$

称为是 ∂M 在 M 中的**领圈邻域**.

定理 3.1 的证明 首先指出：因为 ∂M 是紧致集，所以可统一地确定一个正实数 ε，使得问题(3.1)的解对所有的 $(t,p)\in[0,\varepsilon)\times\partial M$ 存在.

其次，我们注意到，对于 $p\in\partial M$，

$$(\mathrm{D}_t\gamma)_{(0,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\dot{\gamma}(0,p)=\sigma(p).\tag{3.2}$$

这里的切向量 $\sigma(p)$是内指向的. 另一方面，因为

$$\gamma(0,p) \equiv p, \quad \forall p \in \partial M,$$

所以

(3.3) $$(\mathrm{D}_p\gamma)_{(0,p)}(\xi) = \xi, \quad \forall \xi \in T_p(\partial M).$$

由偏微分式子(3.2)和(3.3)可知，在任何点 $p \in \partial M$，微分

$$(\mathrm{D}\gamma)_{(0,p)}: T_{(0,p)}([0,\varepsilon) \times \partial M) \to T_p M$$

都是满秩线性映射. 于是，根据逆函数定理和第四章的引理 4.2，可以肯定：存在 $\delta \in (0,\varepsilon)$，使得 $\gamma|[0,\delta) \times \partial M$ 是从 $[0,\delta) \times \partial M$ 到 M 的某个开集 $\Delta \supset \partial M$ 的 C^∞ 同胚映射. □

设 M 是紧致光滑带边流形，γ 如定理 3.1 所述. 约定记

$$h_+ = \gamma|[0,\delta) \times \partial M, \quad \Delta_+ = h_+([0,\delta) \times \partial M).$$

考察无交并

$$((-\delta,\delta) \times \partial M) \coprod M.$$

约定在这无交并集中将 $(t,p) \in [0,\delta) \times \partial M$ 与 $h_+(t,p)$ 等同视之，这样建立一个商空间

$$M_+ = ((-\delta,\delta) \times \partial M) \coprod_{(h_+)} M.$$

这样的商空间 M_+ 仍是 Hausdorff 拓扑空间. 我们可以利用 $(-\delta,\delta) \times \partial M$ 的 C^∞ 图汇与 M 的 C^∞ 图汇，合起来做成 M_+ 的 C^∞ 图汇. 因为

$$h_+: [0,\delta) \times \partial M \to \Delta_+$$

是 C^∞ 同胚映射，所以在相粘合的部位原属两个图汇的图卡必定是 C^∞ 相容的.

我们取 M 的另一个拷贝，并记

$$h_-(t,p) = \gamma(-t,p), \quad \forall (t,p) \in (-\delta,0] \times \partial M.$$

于是

$$h_-: (-\delta,0] \times \partial M \to M$$

是从 $(-\delta,0] \times \partial M$ 到 M(另一拷贝)的某个开集 $\Delta_- \supset \partial M$ 的

C^∞同胚. 采取与上面所讨论的完全类似的做法，可以建立另一个 C^∞ 流形：

$$M_- = ((-\delta,\delta)\times\partial M)\coprod_{(h_-)} M.$$

映射 h_- 与 h_+ 在 $0\times\partial M$ 处都相当于 ∂M 的恒同映射.

我们可以将 M_- 与 M_+ 相应于 $(-\delta,\delta)\times\partial M$ 的部位粘贴，这样得到一个紧致光滑的无边流形 L. 这样的 L 被称为是带边流形 M 的**倍流形**(参看图 20)，M 可视为 L 的闭子集.

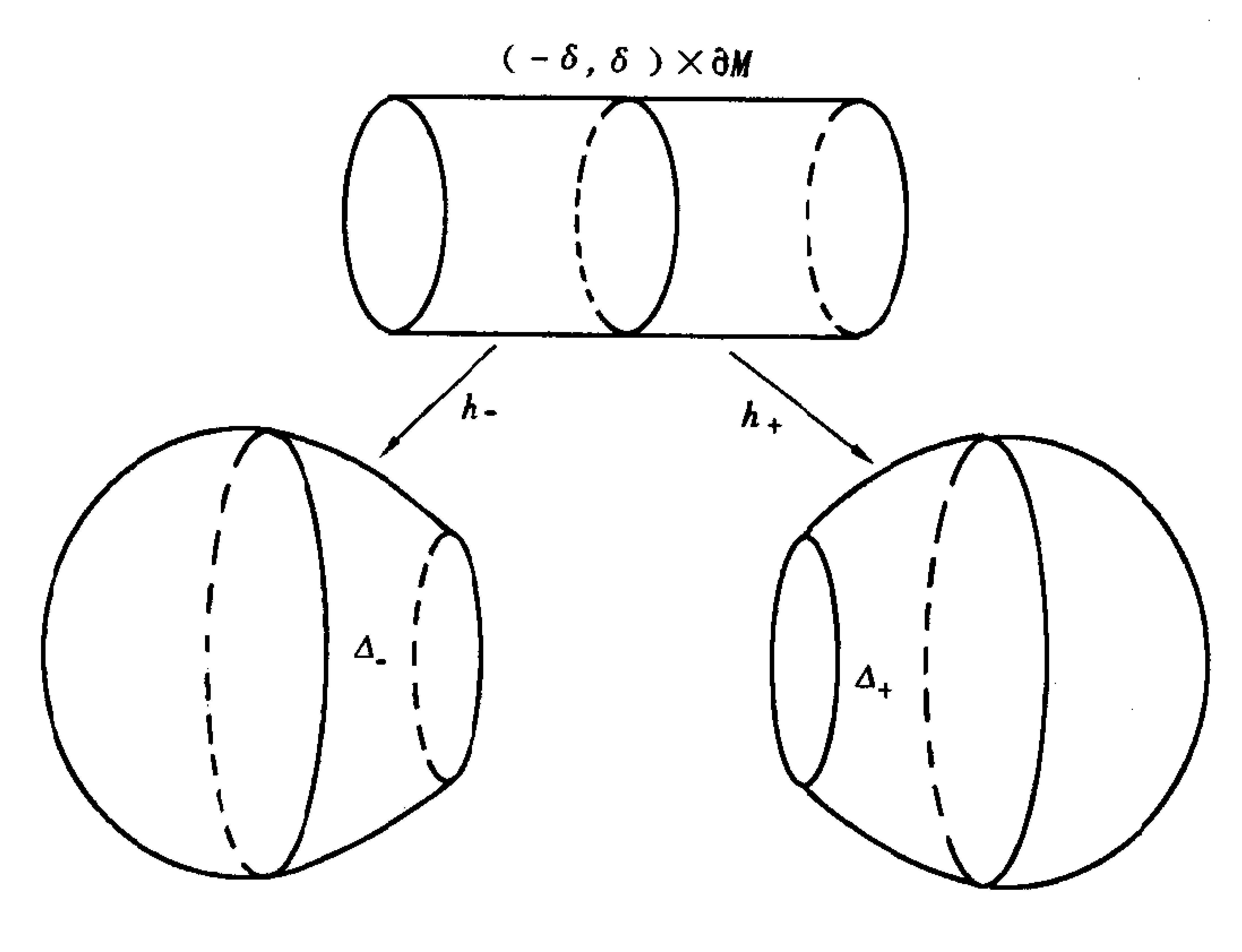


图 20

这样，我们证明了以下定理 3.2.

定理 3.2 任何紧致光滑的带边流形 M 都有倍流形 L，这是一个紧致光滑的无边流形，并且 M 可视为 L 的闭子集.

定理 3.3(映射的光滑化，带边流形情形)

设 M 是紧致光滑的带边流形，N 是光滑的无边流形，$f: M\to N$ 是连续映射，ε 是给定正实数. 则存在光滑映射

$g: M \to N$，满足以下要求：

(1) $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in M$;

(2) g 同伦于 f（当然只能是 C^0 同伦）.

证明 首先将 N 嵌入到 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^l$ 之中. 设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^l$ 中的管状邻域，$\rho: \Omega \to N$ 是相应的 C^∞ 收缩映射. 因为 $K = f(M)$ 是紧致集，所以存在实数 $\omega > 0$，使得 $K_\omega \subset \Omega$，这里

$$K_\omega = \{y \in \boldsymbol{R}^l \mid d(y, K) \leqslant \omega\}.$$

又因为 $\rho|K_\omega: K_\omega \to N$ 的一致连续性，所以存在 $\eta \in (0, \omega)$，使得

$$(3.4) \qquad \begin{cases} y', y \in K_\omega, \\ \|y' - y\| < \eta \end{cases} \Longrightarrow d(\rho(y'), \rho(y)) < \varepsilon.$$

设 L 是 M 的倍流形. 因为 M 是 L 的闭子集，所以根据 Tietze 扩充定理，可以将

$$f: M \to N \subset \boldsymbol{R}^l$$

扩充为

$$\widetilde{f}: L \to \boldsymbol{R}^l.$$

于是，援引无边流形的相应命题，可知存在 $\widetilde{g} \in C^\infty(L, \boldsymbol{R}^l)$，使得

($\widetilde{1}$) $\|\widetilde{g}(x) - \widetilde{f}(x)\| < \eta$, $\forall x \in L$;

($\widetilde{2}$) $\widetilde{H}(t, x) = \widetilde{g}(x) + t(\widetilde{f}(x) - \widetilde{g}(x))$ 将 $\widetilde{g}$ 同伦于 $\widetilde{f}$.

我们记

$$g = \rho \circ \widetilde{g} | M,$$
$$H = \rho \circ \widetilde{H} | (I \times M).$$

则依据($\widetilde{1}$)，(3.4)和($\widetilde{2}$)可得：

(1) $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in M$;

(2) $H \in C^0(I \times M, N)$ 将 g 同伦于 f. □

引理 3.4 设 ω 是任意给定的正实数，M 是紧致光滑的带

边流形，$f_0,f_1\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R}^l)$. 设 $F: I\times M\to\boldsymbol{R}^l$ 是连续映射，满足以下条件：

$$F(t,x)=f_0(x),\quad \forall (t,x)\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\times M,$$

$$F(t,x)=f_1(x),\quad \forall (t,x)\in\left[\frac{2}{3},1\right]\times M.$$

则存在光滑映射 $G: I\times M\to\boldsymbol{R}^l$，满足要求：

$$G(t,x)=f_0(x),\quad \forall (t,x)\in\left[0,\frac{1}{9}\right]\times M;$$

$$G(t,x)=f_1(x),\quad \forall (t,x)\in\left[\frac{8}{9},1\right]\times M;$$

$$\|G(t,x)-F(t,x)\|\leqslant\omega,\quad \forall (t,x)\in I\times M.$$

证明 首先取 $\lambda\in C^{\infty}(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$，满足条件

$$\lambda(t)\begin{cases}=1, & \forall t\in\left[\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right];\\ \in[0,1], & \forall t\in\boldsymbol{R};\\ =0, & \forall t\in\left(-\infty,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},+\infty\right).\end{cases}$$

其次，设 L 是 M 的倍流形，则 M 是 L 的闭子集. 于是 $I\times M$ 也就是 $\boldsymbol{R}\times L$ 的闭子集. 根据 Tietze 扩充定理，可将 F 扩充为连续映射

$$\widetilde{F}_0:\boldsymbol{R}\times L\to\boldsymbol{R}^l.$$

于是，存在

$$\widetilde{G}_0\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}\times L,\boldsymbol{R}^l),$$

使得

$$\|\widetilde{G}_0(t,x)-\widetilde{F}_0(t,x)\|<\omega,\quad \forall (t,x)\in I\times M.$$

我们定义

$$\widetilde{G}(t,x)=(1-\lambda(t))\widetilde{F}_0(t,x)+\lambda(t)\widetilde{G}_0(t,x),$$

并记

$$G = \widetilde{G}\big|(I \times M).$$

则显然

$$G: I \times M \to \boldsymbol{R}^l$$

满足全部要求. □

定理 3.5(同伦的光滑化,带边流形情形) 设 M 是紧致光滑的带边流形,N 是光滑的无边流形,$f_0, f_1: M \to N$是光滑映射. 如果 f_0 连续同伦于 f_1,那么 f_0 也就必定光滑地同伦于 f_1.

证明 首先将 N 嵌入到Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^l$ 之中. 设 Ω 是 N 在 $\boldsymbol{R}^l$ 中的管状邻域, $\rho: \Omega \to N$ 是相应的 C^∞收缩映射. 设 $F \in C^0(I \times M, N)$将 f_0 同伦于 f_1. 不妨设

$$F(t,x) = f_0(x), \quad \forall (t,x) \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \times M;$$

$$F(t,x) = f_1(x), \quad \forall (t,x) \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \times M.$$

对于紧致集

$$K = F(I \times M) \subset N \subset \Omega,$$

存在 $\omega > 0$,使得 $K_\omega \subset \Omega$,这里

$$K_\omega = \{y \in \boldsymbol{R}^l \mid d(y, K) \leqslant \omega\}.$$

将 F 看成是从 $I \times M$ 到 $\boldsymbol{R}^l$ 的连续映射. 根据引理 3.4,存在光滑映射 $G: I \times M \to \boldsymbol{R}^l$,满足以下要求:

$$G(t,x) = f_0(x), \quad \forall (t,x) \in \left[0, \frac{1}{9}\right] \times M;$$

$$G(t,x) = f_1(x), \quad \forall (t,x) \in \left[\frac{8}{9}, 1\right] \times M;$$

$$\|G(t,x) - F(t,x)\| < \omega, \quad \forall (t,x) \in I \times M.$$

如果记

$$H = \rho \circ G: I \times M \to N,$$

那么显然 H 就是 f_0 与 f_1 之间的光滑同伦. □

§4 Morse 函数

设 M 是一个光滑流形，$f: M\to \boldsymbol{R}$ 是一个光滑映射，$p\in M$. 如果

$$\mathrm{rank}_p f = 0 < 1,$$

那么 p 就是 f 的临界点. 用局部坐标来表示，p 为 f 的临界点的充分必要条件是：对于 p 点邻近的任意一个局部坐标图卡 (U,φ)，在 $a=\varphi(p)$ 点，函数 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 的所有的一阶偏导数都等于 0，即

$$(4.0)\qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^1}(a) = \cdots = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^m}(a) = 0.$$

定义 4.1 设 M 是一个光滑流形，$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$. 如果 p 是 f 的临界点，并且 f 的局部表示 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$ 在 $a=\varphi(p)$ 点的二阶偏导数方阵（通常称之为 Hessian 方阵）非退化，即

$$(4.1)\qquad \det\left(\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^i \partial x^j}(\varphi(p))\right) \neq 0.$$

那么我们就称 p 为 f 的**非退化临界点**.（作为练习，请读者验证这样一个事实：上面定义中的条件(4.1)不依赖于局部坐标的具体选择.）

定义 4.2 设 M 是一个 C^∞ 流形. $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$. 如果 f 的所有的临界点都是非退化的，那么我们就称 f 为 Morse 函数.

下面将用我们已经很熟悉的方法去证明：Morse 函数是“相当多”的.

引理 4.3 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，$f\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$，$K$ 是包含于 U 中的紧致集. 如果 f 在 K 上没有退化的临界点，那么在 C^2 意义下与 f 充分接近的 $g\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$ 也具有同样的性质：g

在 K 上没有退化的临界点.

证明 考察表示式

$$\Delta(f,x)=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)\right)^2+\left(\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x)\right)\right)^2.$$

显然 f 在 K 上没有退化临界点的充分必要条件是

$$\Delta(f,x)>0,\quad \forall x\in K. \tag{4.2}$$

如果(4.2)成立,那么只要 g 在 C^2 意义下与 f 充分接近,也就有

$$\Delta(g,x)>0,\quad \forall x\in K.$$

因而 g 在 K 上也没有退化临界点. □

引理 4.4 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集, $f\in C^\infty(U,\boldsymbol{R})$. 则存在长度可任意小的向量 $b\in\boldsymbol{R}^m$,使得函数

$$g(x)=f(x)-b\cdot x$$

在 U 上没有退化临界点.

证明 设 $F\in C^\infty(U,\boldsymbol{R}^m)$是这样定义的:

$$F(x)=\mathrm{D}f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

根据 Sard 定理,对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在映射 F 的正则值 $b\in\boldsymbol{R}^m$,使得 $\|b\|<\varepsilon$. 我们记

$$g(x)=f(x)-b\cdot x.$$

显然有

$$\mathrm{D}g(x)=\mathrm{D}f(x)-b=F(x)-b,\quad \mathrm{D}^2g(x)=\mathrm{D}F(x).$$

因为 b 不是 F 的临界值,所以任何

$$a\in\{x\in\boldsymbol{R}^m\,|\,\mathrm{D}g(x)=F(x)-b=0\}$$

都使得

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\partial x_j}(a)\right)=\mathrm{D}^2g(a)=\mathrm{D}F(a)$$

非退化. □

引理 4.5 设 M 是一个 C^∞ 流形，$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，$H$ 是 M 中的紧致集，f 在 H 上没有退化临界点，δ 是任意给定的正实数. 又设(U,φ)是 M 的局部坐标图卡，V 和 W 是包含在 U 之中的开集，并且

$$\varphi(U)=B_3,\quad \varphi(V)=B_2,\quad \varphi(W)=B_1.$$

则存在 $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，满足这样的条件：

(1) $g(p)=f(p)$，$\forall p\in M\backslash V$；

(2) g 在 $H\cup\overline{W}$ 上没有退化临界点；

(3) $|g(p)-f(p)|<\delta$，$\forall p\in M$.

证明 取 $\eta\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，满足条件

$$\begin{cases}\eta(p)=1, & \forall p\in\overline{W},\\ 0<\eta(p)<1, & \forall p\in V\backslash\overline{W},\\ \eta(p)=0, & \forall p\in M\backslash V.\end{cases}$$

记 $\tilde{f}=f\circ\varphi^{-1}$. 根据引理 4.4，存在长度可任意小的 $b\in\boldsymbol{R}^m$，使得

$$\tilde{f}(x)-b\cdot x$$

在 $\varphi(U)=B_3$ 上没有退化临界点. 我们定义

$$g(p)=f(p)-\eta(p)(b\cdot\varphi(p)).$$

容易看出，在 $\overline{W}$ 上函数 g 没有退化的临界点. 另外，如果取 b 充分小，可使 g 在 U 上与 f 按 C^2 意义充分接近，因而可使 g 在 $\overline{V}\cap H$ 上没有退化临界点. 在 V 以外的地方，显然有 $g(p)=f(p)$. 因而，只要 b 取得足够小，所定义的 g 就满足引理的全部要求. □

定理 4.6 设 M 是一个 C^∞ 流形，$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$. 则对任意给定的正值函数 $\varepsilon\in C^0(M,\boldsymbol{R})$，存在 Morse 函数 $g\in$

$C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$，使得

$$|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p), \quad \forall p \in M.$$

证明 选取可数个局部坐标图卡(U_i,φ_i)和开集

$$V_i, W_i \subset U_i, \quad i = 1,2,\cdots,$$

满足条件：

(1) $\mathscr{U} = \{U_i\}$是局部有限族；

(2) $\varphi_i(U_i) = B_3$，$\varphi_i(V_i) = B_2$，$\varphi_i(W_i) = B_1$；

(3) $\mathscr{W} = \{W_i\}$覆盖了 M.

因为 $\overline{V}_i$ 是 M 中的紧致集，所以

$$\varepsilon_i = \inf\{\varepsilon(p) \mid p \in \overline{V}_i\} > 0, \quad i = 1,2,\cdots,$$

约定记

$$\delta_i = \min\{\varepsilon_j \mid \overline{V}_j \cap \overline{V}_i \neq \varnothing\}, \quad i = 1,2,\cdots.$$

我们归纳构造一列函数 $f_i \in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$. 首先置 $f_0 = f$，并记$H_0 = \varnothing$，然后依次定义 $f_1, f_2, \cdots$，满足这样一些条件：

(1_i) $f_i(p) = f_{i-1}(p)$，$\forall p \in M \backslash \overline{V}_i$；

(2_i) 函数 f_i 在

$$H_i = H_{i-1} \cup \overline{W}_i = \bigcup_{j=1}^{i} \overline{W}_j$$

之上没有退化临界点；

(3_i) $|f_i(p) - f_{i-1}(p)| < \delta_i / 2^i$，$\forall p \in M$.

在此基础上，定义

$$g(p) = \lim_{k \to \infty} f_k(p).$$

容易验证：$g \in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$是 Morse 函数，并且

$$|g(p) - f(p)| < \varepsilon(p), \quad \forall p \in M. \qquad \square$$

Morse 函数在许多数学分支中有重要的应用. 限于篇幅，不能在这里逐一介绍. 感兴趣的读者可以参看文献[Gr]，[Ka]

和[Mi].

这里仅介绍运用 Morse 函数研究流形拓扑的一个最简单的范例——**Reeb 定理**. 为此，先要作一些准备. 讨论中所涉及的一些技术性手法，在不少数学分支中有广泛的应用.

引理 4.7 设 U 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中 0 点的凸开邻域，$f\in C^{\infty}(U,\boldsymbol{R})$. 则存在 $g_j\in C^{\infty}(U,\boldsymbol{R})(j=1,\cdots,n)$，使得

$$f(x)=f(0)+\sum_{j=1}^{n}x_jg_j(x),$$

并且 $$g_j(0)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(0),\quad j=1,\cdots,n.$$

如果 f 还满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(0)=0,$$

那么存在 $h_{j,k}\in C^{\infty}(U,\boldsymbol{R})(j,k=1,\cdots,n)$，使得

$$f(x)=f(0)+\sum_{j,k=1}^{n}x_jx_kh_{j,k}(x);$$

并且 $h_{j,k}(x)$ 满足条件：

(1) $h_{j,k}(x)=h_{k,j}(x)$；

(2) $h_{j,k}(0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(0)$.

证明 首先，显然有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(sx)\right)\mathrm{d}s\\&=f(0)+\sum_{j=1}^{n}x_j\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}(sx)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

我们看到：

$$g_j(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}(sx)\mathrm{d}s,\quad j=1,\cdots,n$$

满足引理前一部分的要求.

其次,如果 f 还满足条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(0) = 0,$$

那么当然有

$$g_j(0) = 0, \quad j = 1,\cdots,n.$$

于是

$$g_j(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g_j(tx))\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(stx)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(stx)s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

如果记

$$h_{j,k}(x) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(stx)s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \quad j,k = 1,\cdots,n,$$

那么显然有

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(x)$$

$$= f(0) + \sum_{j,k=1}^{n} x_j x_k h_{j,k}(x).$$

并且 $h_{j,k}(x)$满足条件:

(1) $h_{j,k}(x) = h_{k,j}(x)$;

(2) $h_{j,k}(0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)\displaystyle\int_0^1\int_0^1 s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(0)$,

这里 $j,k=1,\cdots,n$, $x\in U$. □

下面将要介绍的是在许多方面有重要应用的 **Morse 引理**.

引理 4.8(Morse 引理) 设 M 是 n 维 C^∞流形,$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$,$p\in M$ 是 f 的非退化临界点.则存在 p 点邻近 M 的局部坐标图卡(W,η),使得 f 局部表示为

$$f\circ\eta^{-1}(w) = f(p) - w_1^2 - \cdots - w_s^2 + w_{s+1}^2 + \cdots + w_n^2.$$

注记 所给出的局部表示,s 可以等于 0,也可以等于 n. 引理的结论只是说：f 的局部表示是一个非退化二次型的对角形式.

Morse 引理的证明 首先取 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡 (U,φ),要求 $\varphi(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的凸开集,并且 $\varphi(p)=0$. 于是,根据引理 4.7,f 可局部表示为

$$f\circ\varphi^{-1}(u)=f\circ\varphi^{-1}(0)+\sum_{j,k=1}^{n}u_ju_kh_{j,k}(u),$$

也就是

$$f\circ\varphi^{-1}(u)=f(p)+\sum_{j,k=1}^{n}u_ju_kh_{j,k}(u). \tag{4.3}$$

其中的 $h_{j,k}\in C^\infty(\varphi(U),\boldsymbol{R})$满足条件：

(1) $h_{j,k}(u)=h_{k,j}(u)$;

(2) $h_{j,k}(0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j\partial u_k}(0)$.

因为 p 是 f 的非退化临界点,所以

$$\det\left(h_{j,k}(0)\right)_{j,k=1}^{n}\neq 0. \tag{4.4}$$

必要时调整自变量的标号次序,不妨设

$$|h_{1,1}(0)|\geqslant|h_{2,2}(0)|\geqslant\cdots\geqslant|h_{n,n}(0)|.$$

如果 $h_{1,1}(0)=0$, 那么就有

$$h_{2,2}(0)=\cdots=h_{n,n}(0)=0.$$

依据(4.4)可以判定

$$h_{1,2}(0),\ h_{1,3}(0),\cdots,h_{1,n}(0)$$

不能都是 0. 不妨设

$$h_{1,2}(0)\neq 0.$$

我们构作如下的线性变换 $u=l(\tilde{u})$:

$$\begin{cases} u_1 = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2, \\ u_2 = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2, \\ u_3 = \qquad\quad \tilde{u}_3, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ u_n = \qquad\qquad\qquad \tilde{u}_n, \end{cases}$$

然后将局部坐标图卡(U,φ)换成

$$(U,\tilde{\varphi}) = (U, l^{-1} \circ \varphi).$$

于是

$$f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{u}) = f \circ \varphi^{-1}(l(\tilde{u})).$$

我们得到

$$(4.5) \qquad f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\tilde{u} = f(p) + \sum_{j,k=1}^{n} \tilde{u}_j \tilde{u}_k \tilde{h}_{j,k}(\tilde{u}).$$

考察(4.3)式中涉及 u_1 和 u_2 的项 $2u_1u_2h_{1,2}(u)$. 经变换 $u = l(\tilde{u})$该项变成

$$2(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)h_{1,2}(l(\tilde{u})) = 2\tilde{u}_1^2 h_{1,2}(l(\tilde{u})) + \cdots.$$

除了这里的 $2\tilde{u}_1^2 h_{1,2}(l(\tilde{u}))$而外,(4.3)式所有其他项经变换都不可能产生涉及 $\tilde{u}_1^2$ 的项. 于是,(4.5)式中的 $\tilde{h}_{1,1}(\tilde{u})$应该等于 $2h_{1,2}(l(\tilde{u}))$. 因此

$$\tilde{h}_{1,1}(0) = 2h_{1,2}(l(0)) = 2h_{1,2}(0) \neq 0.$$

必要时可将 $\tilde{h}_{j,k}(\tilde{u})$和 $\tilde{h}_{k,j}(\tilde{u})$都换成

$$\frac{1}{2}(\tilde{h}_{j,k}(\tilde{u}) + \tilde{h}_{k,j}(\tilde{u})).$$

于是,可以假定(4.5)式中的 $\tilde{h}_{j,k}(\tilde{u})$ $(j,k=1,\cdots,n)$满足条件

$$\begin{cases} \tilde{h}_{j,k}(\tilde{u}) = \tilde{h}_{k,j}(\tilde{u}), \quad j,k = 1,\cdots,n; \\ \tilde{h}_{1,1}(0) \neq 0. \end{cases}$$

为了避免记号的繁杂. 不妨一开始就假定：对于局部坐标图卡(U,φ),f 的局部表示

$$f\circ\varphi^{-1}(u)=f(p)+\sum_{j,k=1}^{n}u_ju_kh_{j,k}(u)$$

满足以下这些条件：

(1) $h_{j,k}(u)=h_{k,j}(u)$，$\forall j,k\in\{1,\cdots,n\}$，$u\in\varphi(U)$；

(2) $\det(h_{j,k}(u))\neq 0$，$\forall u\in\varphi(U)$；

(3) $h_{1,1}(u)\neq 0$，$\forall u\in\varphi(U)$.

在做了这样的假定之后，考察如下的坐标变换 $v=\rho(u)$：

$$\begin{cases} v_1=\sqrt{|h_{1,1}(u)|}\left[u_1+u_2\dfrac{h_{1,2}(u)}{h_{1,1}(u)}+\cdots+u_n\dfrac{h_{1,n}(u)}{h_{1,1}(u)}\right], \\ v_2= \qquad\qquad u_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots \\ v_n= \qquad\qquad\qquad u_n. \end{cases}$$

选择如下的 p 点邻近的 M 的局部坐标图卡(V,ψ)：

$$V\subset U,\quad \psi=\rho\circ\varphi.$$

对于这局部坐标图卡，f 的局部表示为：

$$f\circ\psi^{-1}(v)=f(p)\pm v_1^2+\sum_{j,k=2}^{n}v_jv_kH_{j,k}(v).$$

必要时将 $H_{j,k}(v)$和 $H_{k,j}(v)$都换成

$$\frac{1}{2}(H_{j,k}(v)+H_{k,j}(v)),$$

不妨设这些 $H_{j,k}(v)$满足条件：

(1) $H_{j,k}(v)=H_{k,j}(v)$，$\forall j,k\in\{2,\cdots,n\}$，$v\in\psi(V)$；

(2) $\det(H_{j,k}(v))_{j,k=2}^{n}\neq 0$，$\forall v\in\psi(V)$.

如果 $n=1$，那么引理的结论已得到证明. 如果 $n>1$，那么可采取归纳推理的办法得出所要求的结论.

最后，我们得到 p 点邻近的局部坐标图卡(W,η)，使得

$$f\circ\eta^{-1}(w)=f(p)-w_1^2-\cdots-w_s^2+w_{s+1}^2+\cdots+w_n^2. \quad \square$$

附注 顺便说明，Morse 引理的证明过程，实际上就是通

常采取配方等手段将非退化的 n 元二次型化为对角形的过程.

下面将对光滑 Riemann 流形上的光滑函数定义梯度向量场.

设 M 是 n 维光滑流形,其切丛 TM 赋有确定的 Riemann 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 对于 M 在 p 点邻近给定的局部坐标,约定记

$$g_{j,k}(p)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle_p;$$

并约定将 $n\times n$ 对称正定方阵 $(g_{j,k}(p))_{j,k=1}^n$ 的逆方阵元素记为

$$g^{i,l}(p),\quad i,l\in\{1,\cdots,n\}.$$

设在 p 点邻近有与上述局部坐标 C^∞ 相容的另一局部坐标. 相应地写出

$$\widetilde{g}_{s,t}(p)=\left\langle\frac{\partial}{\partial y_s},\frac{\partial}{\partial y_t}\right\rangle_p,\quad s,t\in\{1,\cdots,n\},$$

并将相应的 $n\times n$ 方阵 $(\widetilde{g}_{s,t}(p))_{s,t=1}^n$ 的逆方阵元素记为

$$\widetilde{g}^{r,u}(p),\quad r,u\in\{1,\cdots,n\}.$$

在下面的讨论中,没有标明范围的求和符号 $\sum$ 都表示对各指标从 1 到 n 求和. 我们看到

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_{s,t}(p)&=\left\langle\frac{\partial}{\partial y_s},\frac{\partial}{\partial y_t}\right\rangle_p\\&=\left\langle\sum_j\frac{\partial x_j}{\partial y_s}\frac{\partial}{\partial x_j},\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial y_t}\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle_p\\&=\sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial y_s}g_{j,k}(p)\frac{\partial x_k}{\partial y_t}.\end{aligned}$$

相应地有

$$\widetilde{g}^{r,u}(p)=\sum_{i,l}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}g^{i,l}(p)\frac{\partial y_u}{\partial x_l}.$$

这后一式可通过以下的运算予以检验:

$$\sum_{s}\sum_{i,l,j,k}\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_i}g^{i,l}\frac{\partial y_s}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial y_s}g_{j,k}\frac{\partial x_k}{\partial y_t}\right)$$

$$=\sum_{i,l,j,k}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}g^{i,l}\left(\sum_{s}\frac{\partial y_s}{\partial x_l}\frac{\partial x_j}{\partial y_s}\right)g_{j,k}\frac{\partial x_k}{\partial y_t}$$

$$=\sum_{i,l,j,k}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}g^{i,l}\delta_l^j g_{j,k}\frac{\partial x_k}{\partial y_t}$$

$$=\sum_{i,j,k}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}g^{i,j}g_{j,k}\frac{\partial x_k}{\partial y_t}$$

$$=\sum_{i,k}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\delta_k^i\frac{\partial x_k}{\partial y_t}$$

$$=\sum_{i}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_t}$$

$$=\delta_t^r,$$

这里 $r,t\in\{1,\cdots,n\}$.

以上讨论弄明白了坐标变换时 $g_{j,k}$和 $g^{i,l}$的变换法则. 在此基础上,我们将通常 Euclid 空间的梯度向量场概念推广到 Riemann 流形.

设 M 是 C^∞流形,其切丛 TM 赋有确定的 Riemann 度量. 对于 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$,借助于 p 点邻近的局部坐标,可以定义这样一个局部切向量场:

$$\sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4.6}$$

虽然这样的定义是局部的,如果在两个局部坐标域的相交部分,能够证明对于不同的局部坐标由(4.6)式定义的是同一个对象,那么也就可以通过(4.6)这样的局部坐标方式定义整体的切向量场. 下面我们就来验证(4.6)式在坐标变换下的不变性:

$$\sum_{s,t}\left(\widetilde{g}^{s,t}\frac{\partial f}{\partial y_t}\right)\frac{\partial}{\partial y_s}=\sum_{s,t}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial y_s}{\partial x_i}g^{i,j}\frac{\partial y_t}{\partial x_j}\right)\frac{\partial f}{\partial y_t}\frac{\partial}{\partial y_s}$$
$$=\sum_{i,j}g^{i,j}\left(\sum_t\frac{\partial y_t}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial y_t}\right)\left(\sum_s\frac{\partial y_s}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_s}\right)$$
$$=\sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

我们看到：对于 C^∞ 相容的不同局部坐标系，由(4.6)那样的式子表示的是同一个向量．因此，可借助于在各处由(4.6)式表示的局部向量场，定义一个 M 上的整体向量场．我们约定将这样定义的向量场记为

$$\mathrm{grad}\, f$$

并约定将这向量场称作 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$ 的**梯度向量场**．请注意，这样定义的梯度向量场虽然不依赖于各点邻近局部坐标系的选择，但却依赖于 M 的切丛所赋予的 Riemann 度量．对于通常的 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$，如果所选择的 Riemann 度量确实是通常的 Euclid 度量，那么按上述方式定义的 $\mathrm{grad}\, f$ 就是通常 $\boldsymbol{R}^n$ 中按传统方式定义的梯度向量场：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_p,\quad p\in\boldsymbol{R}^n.$$

下面的引理揭示梯度向量场最根本的性质．

引理 4.9 设 M 是 n 维光滑流形，其切丛 TM 赋有确定的 Riemann 度量，$f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$．则对任意的 $p\in M$ 和 M 上过 p 点的任意光滑曲线

$$\begin{cases}\beta:(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)\to M,\\ \beta(\tau)=p.\end{cases}$$

必有
$$\langle\mathrm{grad}f,\dot{\beta}(\tau)\rangle_p=\left.\frac{\mathrm{d}f\circ\beta(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau}.$$

证明 借助于 p 点邻近 M 的局部坐标图卡 (U,φ)，我们将 f 局部表示为 $f\circ\varphi^{-1}$，并约定将 $\dfrac{\partial f\circ\varphi^{-1}}{\partial x_j}$ 简记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$. 另一方面，将过 p 点的曲线 β 局部表示成 $\varphi\circ\beta$，局部表示的各分量简记为

$$x_k(t)=\varphi_k\circ\beta(t),\quad k=1,\cdots,n.$$

于是，切向量 $\dot\beta(t)$ 可表示为

$$\dot\beta(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

在作了以上所述的记号简化约定之后，我们来进行关键的计算：

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{grad}f,\dot\beta(\tau)\rangle_p&=\left\langle\sum_{i,j}\left(g^{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i},\ \sum_k\frac{\mathrm{d}x_k(\tau)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle_p\\&=\sum_{i,j,k}g^{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_k(\tau)}{\mathrm{d}t}\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_k}\right\rangle_p\\&=\sum_{j,k}\left(\sum_i g_{k,i}g^{i,j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau}\\&=\sum_{j,k}\delta_k^j\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau}\\&=\sum_j\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\tau}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\beta(t))\bigg|_{t=\tau}.\qquad\square\end{aligned}$$

附注 对于 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，我们可以将 f 的梯度向量场定义为满足下述条件的切向量场 X：

对任意的 $p\in M$ 和 M 上过 p 点的任意光滑曲线

$$\begin{cases}\beta:(\tau-\varepsilon,\tau+\varepsilon)\to M,\\\beta(\tau)=p\end{cases}$$

必有

$$(4.7)\qquad \langle X,\dot{\beta}(\tau)\rangle_p = \left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\beta(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau}.$$

为了说明定义是确当无歧义的，须证明满足上述条件的切向量场 X 存在并且惟一. 我们前面所作的讨论已经证明了存在性. 尚须证明满足所述要求的切向量场 X 是惟一的. 假定切向量场 X_1 和 X_2 都满足所述要求，则有

$$\langle X_1 - X_2, \dot{\beta}(\tau)\rangle_p = 0.$$

因为 p 和 β 在指定范围内可任意选择，所以上式蕴含：对任何切向量场 Y 都有

$$(4.8)\qquad \langle X_1 - X_2,\ Y\rangle = 0.$$

在(4.8)式中取 $Y=X_1-X_2$ 就得到

$$\langle X_1 - X_2,\ X_1 - X_2\rangle = 0$$

由此得知

$$X_1 - X_2 = 0.$$

这证明了满足所述条件的切向量场的惟一性. □

记号约定 设 M 是光滑流形. 对于给定的 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$ 和给定实数 $a,b,c(a<b)$，约定记：

$$M_{[a,b)} = f^{-1}([a,b)),\ M_{(a,b]} = f^{-1}((a,b]);$$

$$M_{(a,b)} = f^{-1}((a,b));$$

$$M_{[a,b]} = f^{-1}([a,b]);\quad M_c = f^{-1}(c).$$

下面的引理将对 Reeb 定理的证明起关键作用.

引理 4.10 设 M 是紧致光滑流形，其切丛 TM 赋有确定的 Riemann 度量. 对于给定的 $f\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，如果实数 $a<b$ 使得 $M_{[a,b]}$ 中没有 f 的临界点，并且集合 $f^{-1}(a)$ 和 $f^{-1}(b)$ 都不空，那么以下结论成立：

(1) 对任何实数 τ_0, $\tau_1\in[a,b]$, 都可以肯定 M_{τ_0}光滑同胚于 M_{τ_1};特别地, M_a 光滑同胚于 M_b.

(2) 存在映射

$$\alpha:[a,b]\times M_a\to M_{[a,b]},$$

该映射将$[a,b]\times M_a$ 同胚地映成 $M_{[a,b]}$,并且对任何 $t\in[a,b]$ 都有

$$\alpha(\{t\}\times M_a)=M_t.$$

证明 对于足够小的 $\varepsilon>0$, f 在 $M_{(a-2\varepsilon,a+2\varepsilon)}$也没有临界点. 首先取 $\rho\in C^\infty(M,\boldsymbol{R})$,满足条件

$$\rho(q)\begin{cases}=1, & \forall q\in M_{[a,b]};\\ \in[0,1], & \forall q\in M;\\ =0, & \forall q\in M\backslash M_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}.\end{cases}$$

然后在 M 上定义这样一个切向量场:

$$\sigma(q)=\begin{cases}\rho(q)\dfrac{(\mathrm{grad}f)_q}{\langle\mathrm{grad}f,\ \mathrm{grad}f\rangle_q}, & \forall q\in M_{(a-2\varepsilon,a+2\varepsilon)};\\ 0, & \forall q\in M\backslash M_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}.\end{cases}$$

对于 $\tau\in[a,b]$和 $p\in M_{[a,b]}$,考察 Cauchy 问题

$$(4.9)\qquad \begin{cases}\dot\gamma(t)=\sigma(\gamma(t)),\\ \gamma(\tau)=p.\end{cases}$$

对于(4.9)的解 γ,我们有

$$(4.10)\qquad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f\circ\gamma(t)}{\mathrm{d}t}&=\langle\mathrm{grad}f,\ \dot\gamma(t)\rangle_{\gamma(t)}\\ &=\langle\mathrm{grad}f,\sigma(\gamma(t))\rangle_{\gamma(t)}\\ &=\begin{cases}\rho(\gamma(t)), & 若\ \gamma(t)\in M_{(a-2\varepsilon,a+2\varepsilon)},\\ 0, & 若\ \gamma(t)\in M\backslash M_{(a-\varepsilon,a+\varepsilon)}.\end{cases}\end{aligned}$$

上面得到的(4.10)式给我们提供了重要信息. 首先,由 ρ 的定

义和(4.10)式可知：

$$0\leqslant\frac{\mathrm{d}f\circ\gamma(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant 1.$$

于是，对于 $\tau,t\in[a,b]$有

$$0\leqslant f(\gamma(t))-f(\gamma(\tau))\leqslant t-\tau.$$

如果 $\gamma(\tau)\in f^{-1}(\tau)$，那么

$$\tau\leqslant f(\gamma(t))\leqslant t.$$

于是，对于 $\tau,t\in[a,b]$和 $\gamma(\tau)\in f^{-1}(\tau)$必有

$$\gamma(t)\in f^{-1}([\tau,t])\subset f^{-1}([a,b])=M_{[a,b]},$$

据此再回到(4.10)式就得到

$$\tau,t\in[a,b],\quad \gamma(\tau)\in f^{-1}(\tau)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}f\circ\gamma(t)}{\mathrm{d}t}=1,$$

进一步可得

$$\tau,t\in[a,b],\quad \gamma(\tau)\in f^{-1}(\tau)\Longrightarrow f(\gamma(t))=t.$$

约定将(4.9)的解记为 $\beta_\tau^t(p)$，则刚才得到的结果可写成：

$$\tau,t\in[a,b],\quad p\in f^{-1}(\tau)\Longrightarrow\beta_\tau^t(p)\in f^{-1}(t),$$

也就是

$$\text{(4.11)}\qquad \tau,t\in[a,b]\Longrightarrow\beta_\tau^t(f^{-1}(\tau))\subset f^{-1}(t).$$

这一结果还会有进一步的改进.

对于 τ_0, τ, $t\in[a,b]$, 我们有

$$\beta_{\tau_1}\circ\beta_{\tau_0}^{\tau_1}=\beta_{\tau_0}^{t},\quad \beta_{\tau_0}^{t}\circ\beta_{\tau_1}^{\tau_0}=\beta_{\tau_1}^{t}.$$

由此得知

$$\beta_{\tau_1}^{\tau_0}\circ\beta_{\tau_0}^{\tau_1}=\beta_{\tau_0}^{\tau_0},\quad \beta_{\tau_0}^{\tau_1}\circ\beta_{\tau_1}^{\tau_0}=\beta_{\tau_1}^{\tau_1}.$$

因此

$$\beta_{\tau_1}^{\tau_0}\circ\beta_{\tau_0}^{\tau_1}\big|M_{\tau_0}=\mathrm{id}_{M_{\tau_0}},\quad \beta_{\tau_0}^{\tau_1}\circ\beta_{\tau_1}^{\tau_0}\big|M_{\tau_1}=\mathrm{id}_{M_{\tau_1}}.$$

我们证明了：$\beta_{\tau_0}^{\tau_1}$将 $M_{\tau_0}=f^{-1}(\tau_0)$光滑同胚地映成 $M_{\tau_1}=$

$f^{-1}(\tau_1)$. 前面的(4.11)式实际上应该是

(4.12) $\qquad \tau, t \in [a,b] \Longrightarrow \beta_\tau^t(f^{-1}(\tau)) = f^{-1}(t)$,

并且 β_τ^t 将 $f^{-1}(\tau)$ 光滑同胚地映成 $f^{-1}(t)$.

对于 $p \in M_a = f^{-1}(a)$，约定记

$$\alpha(t,p) = \beta_a^t(p).$$

因为

$$[a,b] \times M_a = \bigcup_{t \in [a,b]} (\{t\} \times f^{-1}(a)),$$

$$M_{[a,b]} = \bigcup_{t \in [a,b]} f^{-1}(t),$$

$$\alpha(\{t\} \times f^{-1}(a)) = \beta_a^t(f^{-1}(a)) = f^{-1}(t).$$

所以

$$\alpha : [a,b] \times M_a \to M_{[a,b]}$$

是单、满映射. α 当然还是连续映射. 因此，α 将$[a,b] \times M_a$ 同胚地映成 $M_{[a,b]}$. 另外，由(4.12)式可得

$$t \in [a,b] \Longrightarrow \alpha(\{t\} \times M_a) = M_t. \qquad \square$$

引理 4.11 设

$$g : S_\varepsilon^{n-1} = \partial D_\varepsilon^n \to \partial D_\varepsilon^n = S_\varepsilon^{n-1}$$

是同胚映射，则可将 g 扩充为同胚映射

$$h : D_\varepsilon^n \to D_\varepsilon^n.$$

证明 我们这样定义 h，规定

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } x = 0, \\ \dfrac{\|x\|}{\varepsilon} g\left(\dfrac{\varepsilon x}{\|x\|}\right), & \text{对于 } x \in D_\varepsilon^n \setminus \{0\}. \end{cases}$$

首先指出这样定义的 $h : D_\varepsilon^n \to D_\varepsilon^n$ 是连续映射. 为此，只须验证 h 在 $x=0$ 处的连续性. 事实上，当$\|x\| \to 0$ 时必有

$$\|h(x)\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon} \left\| g\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \to 0.$$

下面，我们来验证 $h: D_\varepsilon^n \to D_\varepsilon^n$ 的单映射性质和满映射性质.

(I) 验证 h 的单映射性质

(I-1) 对于 $x\neq 0$，显然 $h(x)\neq 0$.

(I-2) 设 $x, x' \in D_\varepsilon^n\setminus\{0\}$. 如果

$$\|x\| \neq \|x'\|,$$

那么
$$\|h(x)\| = \|x\| \neq \|x'\| = \|h(x')\|.$$

如果

$$\|x\| = \|x'\|, \quad h(x) = h(x'),$$

那么
$$g\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|}\right) = g\left(\frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}\right).$$

由此可得

$$\frac{\varepsilon x}{\|x\|} = \frac{\varepsilon x'}{\|x'\|}, \quad x = x'.$$

(II) 验证 h 的满映射性质

(II-1) 对于 $0\in D_\varepsilon^n$，我们有 $h(0)=0$.

(II-2) 对于 $y\in D_\varepsilon^n\setminus\{0\}$，我们记

$$x = \frac{\|y\|}{\varepsilon} g^{-1}\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}\right).$$

则有

$$\|x\| = \|y\|,$$

$$\frac{\varepsilon x}{\|x\|} = \frac{\|y\| g^{-1}\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}\right)}{\|y\|} = g^{-1}\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}\right),$$

$$h(x) = \frac{\|x\|}{\varepsilon} g\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|}\right) = \frac{\|y\|}{\varepsilon} g\left(g^{-1}\left(\frac{\varepsilon y}{\|y\|}\right)\right) = y.$$

我们证明了 $h: D_\varepsilon^n \to D_\varepsilon^n$ 是单、满连续映射，因而是同胚. 另外，很容易验证

$$h\big|S_\varepsilon^{n-1} = g. \qquad \square$$

在引理 4.8(Morse 引理)，引理 4.10 和引理 4.11 的基础

上，我们来证明 Reeb 定理.

定理 4.12（Reeb 定理） 设 M 是 n 维紧致光滑的无边流形. 如果存在恰有两个临界点的 Morse 函数 $f\in C^{\infty}(M,\mathbf{R})$，那么 M 与 S^n 拓扑同胚.

证明 首先，f 必有取得最小值的点和取得最大值的点，这两点应该就是仅有的两个非退化临界点. 设 f 的最小值和最大值分别是 l 和 L. 必要时以 $\dfrac{(f(x)-L)+(f(x)-l)}{L-l}$ 代替 $f(x)$，不妨设 f 的最小值 $l=-1$，最大值 $L=+1$. 设

$$f(p_-)=-1,\quad f(p_+)=+1.$$

根据 Morse 引理（即引理 4.8），存在 M 在 p_- 点邻近的局部坐标图卡 (U,φ) 和 M 在 p_+ 点邻近的局部坐标图卡 (V,ψ)，分别使得

$$f\circ\varphi^{-1}(u)=-1+u_1^2+\cdots+u_n^2;$$

$$f\circ\psi^{-1}(v)=1-v_1^2-\cdots-v_n^2.$$

在下面的讨论中，将采用约定的记号

$$M_{[a,b]}=f^{-1}([a,b]),\quad M_c=f^{-1}(c).$$

只要 $\varepsilon>0$ 足够小，就可使得

$$M_{[-1,-1+\varepsilon^2]}\subset U,\quad M_{[1-\varepsilon^2,1]}\subset V.$$

于是有

$$\begin{aligned}\varphi(M_{[-1,-1+\varepsilon^2]})&=\varphi\circ f^{-1}([-1,-1+\varepsilon^2])\\&=(f\circ\varphi^{-1})^{-1}([-1,-1+\varepsilon^2])\\&=\{u\in\varphi(U)\mid -1\leqslant f\circ\varphi^{-1}(u)\leqslant -1+\varepsilon^2\}\\&=\{u\in\varphi(U)\mid u_1^2+\cdots+u_n^2\leqslant\varepsilon^2\}\\&=D_\varepsilon^n,\end{aligned}$$

$$\varphi(M_{-1+\varepsilon^2})=\partial D_\varepsilon^n=S_\varepsilon^{n-1};$$

同样道理有

$$\psi(M_{[1-\varepsilon^2,1]}) = \{v\in\psi(V)\,|\,1-\varepsilon^2 \leqslant f\circ\psi^{-1}(v)\leqslant 1\}$$
$$= D_\varepsilon^n,$$
$$\psi(M_{1-\varepsilon^2}) = \partial D_\varepsilon^n = S_\varepsilon^{n-1}.$$

约定记

$$I_\varepsilon = [-1+\varepsilon^2,\ 1-\varepsilon^2].$$

根据引理 4.10(对 $a=-1+\varepsilon^2$, $b=1-\varepsilon^2$),存在从 $I_\varepsilon\times M_{-1+\varepsilon^2}$ 到 $M_{[-1+\varepsilon^2,1-\varepsilon^2]}$的同胚映射

$$\alpha: I_\varepsilon\times M_{-1+\varepsilon^2}\to M_{[-1+\varepsilon^2,1-\varepsilon^2]},$$

满足条件

$$\alpha(\{t\}\times M_{-1+\varepsilon^2}) = M_t,\quad \forall t\in I_\varepsilon.$$

为叙述方便,记 $\lambda(t,u)=\alpha(t,\varphi^{-1}(u))$. 因为 $\varphi^{-1}|S_\varepsilon^{n-1}$: $S_\varepsilon^{n-1}\to M_{-1+\varepsilon^2}$是光滑同胚,所以

$$\lambda: I_\varepsilon\times S_\varepsilon^{n-1}\to M_{[-1+\varepsilon^2,1-\varepsilon^2]}$$

是同胚映射,并且

$$\lambda(\{t\}\times S_\varepsilon^{n-1}) = M_t,\quad \forall t\in I_\varepsilon.$$

因为 $\lambda(1-\varepsilon^2,\cdot)$是从 S_ε^{n-1} 到 $M_{1-\varepsilon^2}$的同胚,所以映射

$$g(\cdot)=\psi\circ\lambda(1-\varepsilon^2,\cdot)=\psi\circ\alpha(1-\varepsilon^2,\varphi^{-1}(\cdot))$$

是从 S_ε^{n-1} 到 S_ε^{n-1} 的同胚. 根据引理 4.11,可将 g 扩充为同胚映射

$$h: D_\varepsilon^n\to D_\varepsilon^n.$$

以下约定记

$$X = (\{-1+\varepsilon^2\}\times D_\varepsilon^n)\cup(I_\varepsilon\times S_\varepsilon^{n-1})\cup(\{1-\varepsilon^2\}\times D_\varepsilon^n).$$

这样的 X 是 $\boldsymbol{R}^{1+n}$中半径为 ε,高为 $2-2\varepsilon^2$ 的超圆柱面(人们把 $\boldsymbol{R}^{1+n}$中只低一维的 n 维曲面叫做超曲面). 通过中心幅射投影,

很容易建立 S^n 与 X 的拓扑同胚映射. 于是,为了证明 Reeb 定理,只须建立 X 与 M 之间的拓扑同胚.

注意到

$$\varphi^{-1}(u) = \alpha(-1+\varepsilon^2, \varphi^{-1}(u)), \quad \forall u \in S_\varepsilon^{n-1},$$

$$\psi^{-1} \circ h(u) = \alpha(1-\varepsilon^2, \varphi^{-1}(u)), \quad \forall u \in S_\varepsilon^{n-1},$$

可以按以下方式定义一个映射 $\omega: X \to M$(参看图 21):

$$\omega(t,u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u), & \forall (t,u) \in \{-1+\varepsilon^2\} \times D_\varepsilon^n, \\ \alpha(t, \varphi^{-1}(u)), & \forall (t,u) \in I_\varepsilon \times S_\varepsilon^{n-1}, \\ \psi^{-1} \circ h(u), & \forall (t,u) \in \{1-\varepsilon^2\} \times D_\varepsilon^n. \end{cases}$$

很容易验证 $\omega: X \to M$ 是单、满连续映射,因而是同胚映射.

至此,我们证明了: S^n 同胚于 M. □

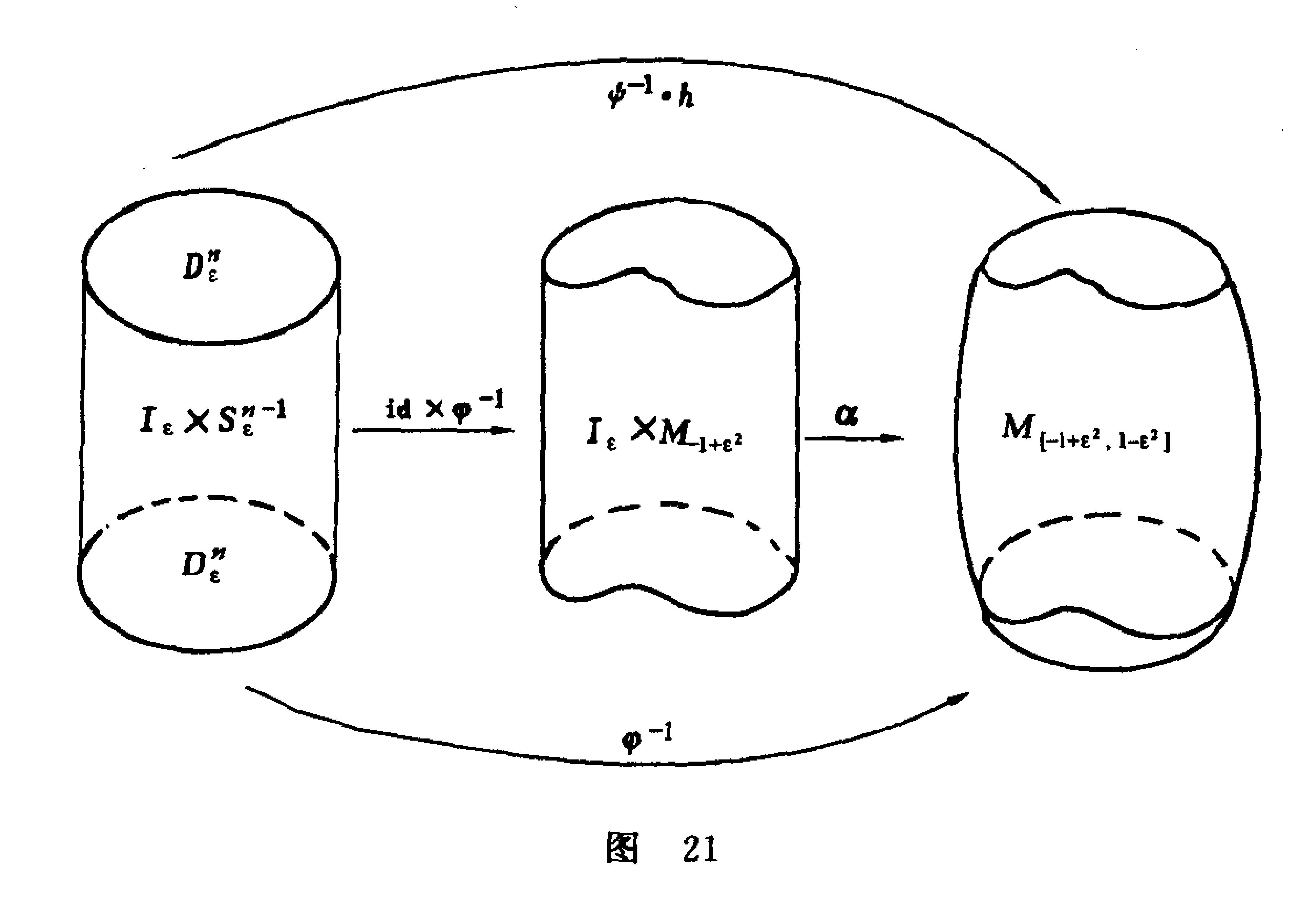


图 21

附注 Reeb 定理只能断定 S^n 与 M 拓扑同胚,不能断定 S^n 与 M 微分同胚. Milnor1956 年发表了一篇引起轰动效应的论

文：

On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, *Annals of Math*, **64**(1956), 399～405.
该文指出：存在不能微分同胚于 S^7 的 7 维紧致流形 M，该流形允许恰有两个临界点的 Morse 函数，因而与 S^7 拓扑同胚. 这就是说，S^7 可以有不同的微分结构. 除了通常作为 Euclid 空间子流形的微分结构而外，还有所谓 7 维怪球的微分结构.（后来人们弄清楚 S^7 有 28 种不同的微分结构.）

练　习　F

F.1. 设 Γ 是 $\boldsymbol{R}^2$ 上的向量场. 试对以下(1)和(2)两种情形分别求出由 Γ 生成的单参数变换群 $\gamma_t(x,y)$（请说明这两个群分别由怎样的一些变换组成）：

(1) $\Gamma(x,y)=-y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(2) $\Gamma(x,y)=x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

F.2. 设 $f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ 是 C^∞ 函数，

$$\Gamma(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

是 f 的梯度向量场，γ_t 是由向量场 Γ 生成的单参数变换群. 试证：如果 $s\geqslant t$，那么

$$f(\gamma_s(x))\geqslant f(\gamma_t(x)),\quad \forall x\in\boldsymbol{R}^n.$$

F.3. 考察定理 2.2 证明中所定义的关系“～”. 验证“～”是一种等价关系.

F.4. 设 M 是连通的 C^∞ 流形. 试证 M 中的任意两点都可以用 M 的 1 维正则 C^∞ 子流形予以联结.

F.5. 设 M 是紧致光滑流形. 试证：存在 M 上的 Morse 函

数 f，它在不同的临界点处取不同的值.

F. 6. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则光滑子流形. 试证存在线性函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$，使得 $f|M$ 是 M 上的 Morse 函数.

F. 7. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则光滑子流形，$f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$. 试证几乎所有的 $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$ 都使得如下定义的 g 成为 Morse 函数：

$$g: M \to \boldsymbol{R},$$
$$x \mapsto f(x) + \lambda \cdot x,$$

其中 $\lambda \cdot x$ 表示向量 λ 与向量 x 的数量积. (这是一个很有意思的结果. 据此可以作出练习 F. 6 的另一解答.)

F. 8. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则光滑子流形. 试证：几乎所有的 $\lambda \in \boldsymbol{R}^n$ 都使得由 $f(x) = \|x - \lambda\|^2$ 定义的 $f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R})$ 成为 Morse 函数.

第七章　一维流形的分类与 Brouwer 不动点定理

1 维流形是最简单的流形. 在 § 1 中,我们将证明:任何一个连通的 1 维微分流形,或者微分同胚于圆周 S^1,或者微分同胚于实数区间$[0,1]$,$[0,1)$,$(0,1)$之一. 由此可知,本质上只有四种不同的 1 维连通微分流形,其中紧致的只有两种. 利用 1 维流形分类的重要结论,我们将在 § 2 给出 Brouwer 不动点定理一个简单的证明.

§ 1　一维微分流形的分类

一般约定　在本节中,我们假定 M 是任意一个 1 维微分流形. 根据 Whitney 嵌入定理,不妨设 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的正则子流形,因而切丛 TM 上赋有由 $\boldsymbol{R}^3$ 的 Euclid 内积诱导的 Riemann 度量.

$\boldsymbol{R}$ 中多于一点的连通集合只能是(a,b),$[a,b)$,$(a,b]$或者$[a,b]$这样的区间. 我们将着重考察从任意一个实数区间 I 到 M 中的 C^1 映射.

定义 1.1　设 I 是任意一个实数区间,$\alpha: I\to M$ 是一个 C^1 映射. 如果 α 在 I 中任意一点邻近都是局部微分同胚,那么我们就称 $\alpha: I\to M$ 是 M 的一个**参数化**(或**参数表示**). 如果 M 的参数表示 $\alpha: I\to M$ 满足这样的条件:

$$\|\alpha'(t)\| = 1,\quad \forall t\in I,$$

那么我们就说 α 是 M 的一个**弧长式参数化**(或**弧长式参数表示**).

设 p 是 M 的任意一点. 则 p 点邻近适当的局部坐标映射

的逆映射就可以看成一个参数表示. 因而必定存在参数化 $\alpha: I\to M$,使得 $p\in\alpha(I)$. 如果换用新的参数

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| \mathrm{d}t ,$$

那么
$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$
就定义了一个弧长式参数表示. 这后一事实可验证如下:

$$\beta'(s) = \alpha'(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|, \quad \|\beta'(s)\| = 1.$$

引理 1.2 设 $\alpha: I\to M$ 和 $\beta: J\to M$ 是 M 的两个弧长式参数化. 如果 $t_0\in I\cap J$ 使得

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \alpha'(t_0) = \beta'(t_0),$$

那么就有
$$\alpha(t) = \beta(t), \quad \forall t\in I\cap J.$$
于是,在实数区间 $K=I\cup J$ 上可以定义

$$\gamma(t) = \begin{cases}\alpha(t), & \forall t\in I,\\ \beta(t), & \forall t\in J.\end{cases}$$

这样定义的 $\gamma: K\to M$ 也是 M 的弧长式参数表示,并且

$$\gamma(K) = \alpha(I)\cup\beta(J).$$

证明 因为 α 和 β 都是局部微分同胚,所以在 t_0 点邻近局部可定义 $f(t)=\beta^{-1}\circ\alpha(t)$. 经过局部参数变换,我们得到

$$\beta(f(t)) = \alpha(t), \quad \beta'(f(t))f'(t) = \alpha'(t).$$

因为
$$\|\beta'(f(t))\| = \|\alpha'(t)\| = 1,$$
所以
$$f'(t) = \pm 1.$$
注意到 $f(t_0)=t_0$, $f'(t_0)=1$,可以断定在 t_0 邻近有

$$f'(t) = 1, \quad f(t) = t.$$

因为在 t_0 邻近 $f(t)=\beta^{-1}\circ\alpha(t)$实际上是恒同映射,所以在 $I\cap J$ 的含有 t_0 的某一段子区间上有

$$\alpha(t) = \beta(t), \quad \alpha'(t) = \beta'(t).$$

考察这样一个集合

$$E = \{t \in I \cap J \,|\, \alpha(t) = \beta(t),\ \alpha'(t) = \beta'(t)\}.$$

从上面的讨论可知,E 是 $I \cap J$ 中的一个开集.还容易看出,E 是 $I \cap J$ 中的闭集.因为 $I \cap J$ 是连通集,所以必有 $E = I \cap J$.于是在 $K = I \cup J$ 上可定义

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in I, \\ \beta(t), & t \in J. \end{cases}$$

我们完成了引理的证明. □

引理 1.3 设 $\alpha: I \to M$ 和 $\beta: J \to M$ 都是弧长式参数化.如果 $\alpha(I) \cap \beta(J) \neq \varnothing$,那么存在 M 的弧长式参数化 $\gamma: K \to M$,使得

$$\gamma(K) = \alpha(I) \cup \beta(J).$$

证明 设 $p \in \alpha(I) \cap \beta(J)$,并设 $\alpha(t_0) = \beta(t_1) = p$.我们定义(表示式中的"±"号待稍后选定)

$$\tilde{\beta}(t) = \beta(\pm(t - t_0) + t_1).$$

这样得到一个弧长式参数化 $\tilde{\beta}: \tilde{J} \to M$,满足条件

$$\tilde{\beta}(\tilde{J}) = \beta(J).$$

适当选择 $\tilde{\beta}$ 表示式中的"±"号,可使

$$\tilde{\beta}(t_0) = \alpha(t_0), \quad \tilde{\beta}'(t_0) = \alpha'(t_0).$$

于是,根据引理 1.2,存在弧长式参数化 $\gamma: K \to M$,使得

$$\gamma(K) = \alpha(I) \cup \tilde{\beta}(\tilde{J}) = \alpha(I) \cup \beta(J). \qquad \square$$

引理 1.4 设 M 是连通的 1 维微分流形,则存在弧长式参数表示 $\alpha: I \to M$,使得

$$\alpha(I) = M.$$

证明 首先,任意取定一个弧长式参数表示 $\beta_0: J_0 \to M$.不妨设

$$0 \in J_0, \quad \beta_0(0) = p_0, \quad \beta_0'(0) = \xi_0.$$

考察所有的满足下面条件(1.1)的弧长式参数表示 $\beta: J\to M$:

(1.1) $$0\in J,\quad \beta(0)=p_0,\quad \beta'(0)=\xi_0.$$

设 E 是 M 的这样一个子集合,它由所有满足下面条件(1.2)的点 $p\in M$ 组成:

(1.2) $$\begin{cases}\text{存在满足条件(1.1) 的弧长式参数}\\ \text{表示 } \beta: J\to M\text{,使得 } p\in\beta(J).\end{cases}$$

容易证明 E 是 M 中的一个既开且闭的集合. 于是,依据 M 的连通性,可以确定 $E=M$.

设 $\beta_i: J_i\to M(i=1,2)$是两个满足条件(1.1)的弧长式参数表示,则必有(根据引理 1.2):

$$\beta_1\big|(J_1\cap J_2)=\beta_2\big|(J_1\cap J_2).$$

因此,在所有的满足条件(1.1)的弧长式参数表示的定义区间的并集 I 上,可以统一地定义一个弧长式参数表示 $\alpha: I\to M$,使得

$$\alpha(I)=E=M.\qquad\square$$

引理 1.5 设 $\alpha: I\to M$ 是一个弧长式参数表示;并设存在 $t_0,\ t_1\in I,\ t_0<t_1$,使得

$$\alpha(t_0)=\alpha(t_1)=p.$$

则必有
$$\alpha'(t_0)=\alpha'(t_1).$$

证明 因为 T_pM 是 1 维向量空间,所以

$$\alpha'(t_0)=\pm\,\alpha'(t_1).$$

我们指出不可能有 $\alpha'(t_0)=-\alpha'(t_1)$. 否则,由于

$$\alpha(t_0)=\alpha(t_1),\quad \alpha'(t_0)=-\,\alpha'(t_1),$$

对 $\alpha(t)$和 $\beta(t)=\alpha(-(t-t_0)+t_1)$这两个弧长式参数表示有

$$\alpha(t_0)=\beta(t_0),\quad \alpha'(t_0)=\beta'(t_0).$$

于是,根据引理 1.2 就有

$$\alpha(t)=\beta(t)=\alpha(-(t-t_0)+t_1),\quad \forall t\in[t_0,t_1],$$

因而

$$\alpha'(t) = -\alpha'(-(t-t_0)+t_1), \quad \forall t \in (t_0,t_1).$$

在这后一式中取 $t=\frac{t_0+t_1}{2}$ 就得到矛盾的结果：

$$\alpha'\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right) = -\alpha'\left(\frac{t_0+t_1}{2}\right).$$

根据以上讨论，我们确认：

$$\alpha'(t_0) = \alpha'(t_1). \qquad \square$$

引理 1.6 设 $\alpha : I \to M$ 和 $\beta : J \to M$ 都是弧长式参数表示. 如果存在非退化区间

$$H \subset I \cap J$$

使得

$$\alpha|H = \beta|H,$$

那么必有

$$\alpha|I \cap J = \beta|I \cap J.$$

证明 取 $t_0 \in \operatorname{int} H$. 因为 $\alpha|H=\beta|H$，所以

$$\alpha(t_0) = \beta(t_0), \quad \alpha'(t_0) = \beta'(t_0).$$

于是，根据引理 1.2 可得

$$\alpha|I \cap J = \beta|I \cap J. \qquad \square$$

定理 1.7 任何一个连通的 1 维微分流形 M 或者微分同胚于圆周 S^1，或者微分同胚于实数区间 $(0,1)$，$[0,1)$ 与 $[0,1]$ 这三者之一.

由此可知，本质上只有四种不同的 1 维连通的微分流形，其中紧致的只有两种：或者微分同胚于圆周 S^1，或者微分同胚于闭区间 $[0,1]$.

证明 根据引理 1.4，存在 M 的弧长式参数化 $\alpha : I \to M$，使得 $\alpha(I)=M$. 以下分两种情形讨论.

情形 A. $\alpha : I \to M$ 是单映射. 对这一情形，$\alpha : I \to M$ 是单满映射，并且按照参数化的定义，α 还是局部微分同胚. 于是，

$\alpha: I \to M$实际上是整体微分同胚. 因而 M 微分同胚于$(0,1)$，$[0,1)$或者$[0,1]$这三者之一.

情形 B. $\alpha: I \to M$ 不是单映射. 对这情形，不妨设 $0 \in I$ 并且存在 $t \in I, t>0$，使得 $\alpha(t)=\alpha(0)$. 我们记

$$\tau = \inf\{t \in I \mid t > 0,\ \alpha(t) = \alpha(0)\}.$$

因为 $\alpha: I \to M$ 是局部微分同胚，所以显然有 $\tau>0$. 这样的 τ 显然使得 $\alpha(\tau)=\alpha(0)$. 我们指出：$\alpha|[0,\tau)$是单映射. 否则，存在 $t_0, t_1 \in [0,\tau), t_0<t_1$，使得 $\alpha(t_0)=\alpha(t_1)$. 根据引理 1.5，还应有 $\alpha'(t_0)=\alpha'(t_1)$. 因而对于 $t \in [0, \tau-(t_1-t_0))$应该有 $\alpha(t)=\alpha(t+(t_1-t_0))$. 特别地有

$$\alpha(0) = \alpha(t_1 - t_0), \quad 0 < t_1 - t_0 < \tau.$$

这与 τ 的最小性质相矛盾.

据以上讨论并根据引理 1.5，我们获悉

(1.3) $$\alpha(\tau) = \alpha(0), \quad \alpha'(\tau) = \alpha'(0).$$

考察以下这些弧长式参数表示：

$$\alpha_k(t) = \alpha(t - k\tau), \quad t \in I + k\tau,\ k \in \mathbf{Z}.$$

由(1.3)可知

$$\alpha_k((k+1)\tau) = \alpha_{k+1}((k+1)\tau),$$
$$\alpha'_k((k+1)\tau) = \alpha'_{k+1}((k+1)\tau).$$

因而可以定义这样一个弧长式参数表示：

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha_k(t) = \alpha(t - k\tau), \quad t \in [k\tau, (k+1)\tau], \quad k \in \mathbf{Z}.$$

我们来证明

$$\tilde{\alpha}|I = \alpha, \quad \tilde{\alpha}(\mathbf{R}) = M.$$

为此，记 $J=\mathbf{R}$，$H=[0,\tau)$. 对于弧长式参数表示

$$\alpha: I \to M, \quad \beta = \tilde{\alpha}: J \to M,$$

显然有 $$\beta|H = \alpha|H.$$

于是，根据引理 1.6 可知

$$\beta|I\cap J=\alpha|I\cap J.$$

因为 $J=\boldsymbol{R}$，$I\cap J=I$，所以

$$\beta|I=\alpha|I=\alpha.$$

于是
$$\beta(I)=\alpha(I)=M.$$

我们证明了
$$\tilde{\alpha}|I=\alpha,\quad \tilde{\alpha}(\boldsymbol{R})=M.$$

对于 $t\in[k\tau,(k+1)\tau]$，显然有

$$\tilde{\alpha}(t+\tau)=\alpha(t+\tau-(k+1)\tau)=\alpha(t-k\tau)=\tilde{\alpha}(t).$$

因而 $\tilde{\alpha}$ 以 τ 为周期. 由此可知 $\tilde{\alpha}([0,\tau))=M$.

以下为记号简单起见，不妨将上一段所定义的 $\tilde{\alpha}$ 仍写为 α，即假定 $\alpha:\boldsymbol{R}\to M$ 是一个弧长式参数化，它满足下列条件：

(1) $\alpha|[0,\tau)$ 是单映射；

(2) $\alpha([0,\tau))=M$；

(3) $\alpha(t+\tau)=\alpha(t)$，$\forall t\in\boldsymbol{R}$.

对于 $\omega=2\pi/\tau$，考察 S^1 的参数化

$$\beta:\boldsymbol{R}\to S^1,$$
$$t\mapsto(\cos\omega t,\sin\omega t).$$

容易看出：

$$(1.4)\qquad \alpha(t_1)=\alpha(t_2)\Longleftrightarrow\beta(t_1)=\beta(t_2)$$

（因二者都等价于 $(t_1-t_2)/\tau\in\boldsymbol{Z}$）. 故存在从 M 到 S^1 的单满映射 $\gamma:M\to S^1$，使得 $\gamma\circ\alpha=\beta$，即以下图表可交换（图 22）. 因为

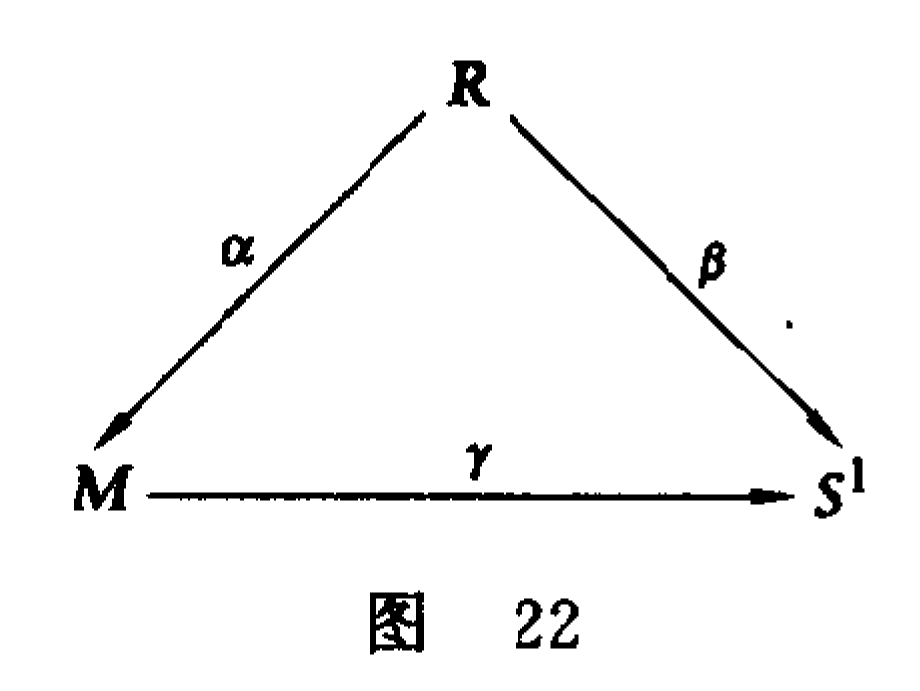


图 22

α 和 β 在 $\boldsymbol{R}$ 的每一点邻近都是局部微分同胚，所以 γ 也在 M 的每一点邻近是局部微分同胚. $\gamma: M \to S^1$ 既是单满映射，又在每一点邻近是局部微分同胚，因而是整体微分同胚. □

作为定理 1.7 的推论，我们得到

定理 1.8 设 M 是紧致的 1 维微分流形，则 ∂M 由偶数个点组成.

证明 M 的每一个连通分支是一个闭集，因而也是紧致的. 每一个连通分支都微分同胚于 S^1 或者$[0,1]$. 因而 ∂M 含有偶数个点. □

§2 Brouwer 不动点定理

利用上节得到的关于 1 维微分流形分类的结果，我们来证明重要的 Brouwer 不动点定理. 首先，回忆一下“收缩核”的定义.

定义 2.1 设 X 是拓扑空间，A 是 X 的子空间. 如果存在连续映射

$$r: X \to A,$$

使得
$$r(x) = x, \quad \forall x \in A,$$

那么我们就称 A 为 X 的**收缩核**，并且称 r 为**收缩映射**.

记号约定 我们约定分别以 S^{n-1} 和 D^n 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的单位球面和闭单位球体，即：

$$S^{n-1} = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| = 1\}, \quad D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}.$$

作为带边的 C^∞ 流形，D^n 的边缘是 $\partial D^n = S^{n-1}$.

定理 2.2 S^{n-1} 不是 D^n 的收缩核. 即不存在这样的连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$，它使得

$$g(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

证明 用反证法. 假定存在连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$，使得

$$g(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

将证明：必定也存在光滑映射 $f: D^n \to S^{n-1}$，使得

$$f(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

为此，我们首先补充 g 的定义，规定

$$(2.1) \qquad g(x) = x, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n \backslash D^n.$$

这样得到一个连续映射 $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$. 其次，我们选取 $\omega \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R})$，满足以下这些条件：

(1) $\omega(-x) = \omega(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}^n$;

(2) $\operatorname{supp} \omega \subset D^n$;

(3) $\int_{\boldsymbol{R}^n} \omega(u) \mathrm{d}u = 1$.

然后定义

$$(2.2) \qquad \psi_0(x) = g(x) - x, \quad x \in \boldsymbol{R}^n$$

(其中的 g 已经按照(2.1)的规定加以延拓). 显然有

$$\psi_0(x) = 0, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n \backslash D^n.$$

我们构造逼近(2.2)的映射：

$$(2.3) \qquad \psi_\varepsilon(x) = \int_{\boldsymbol{R}^n} \omega(u) \psi_0(x + \varepsilon u) \mathrm{d}u.$$

对于 $0 < \varepsilon < 1/2$，显然有

$$(2.4) \qquad \psi_\varepsilon(x) = 0, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n \Big\backslash \left(\frac{3}{2} D^n \right).$$

通过变换 $y = x + \varepsilon u$，可以把(2.3)改写成

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} \omega\left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \psi_0(y) \mathrm{d}y.$$

由这式容易看出 $\psi_\varepsilon: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 是 C^∞ 映射. 还容易验证：当 $\varepsilon \to 0$ 时，由(2.3)所定义的 $\psi_\varepsilon(x)$ 在紧致集 $K = 3D^n$ 上一致收敛于 $\psi_0(x)$.

再考察这样一个映射

$$\varphi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x) + x. \tag{2.5}$$

显然 $\varphi_\varepsilon: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 仍是 C^∞ 映射. 因为当 $\varepsilon \to 0$ 时, φ_ε 在紧致集 $K = 3D^n$ 上一致收敛于 g, 而 g 满足条件

$$\|g(x)\| \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

所以只要取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 可设

$$\|\varphi_\varepsilon(x)\| > 1/2, \quad \forall x \in K = 3D^n.$$

我们定义

$$f(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(2x)}{\|\varphi_\varepsilon(2x)\|}, \quad \forall x \in D^n. \tag{2.6}$$

这样定义的 $f: D^n \to S^{n-1}$ 是 C^∞ 映射. 从(2.4), (2.5)和(2.6)还容易看出

$$f(x) = \frac{2x}{\|2x\|} = \frac{x}{\|x\|}, \quad \forall \|x\| > \frac{3}{4},$$

于是

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \partial D^n = S^{n-1}.$$

综上所述, 我们证明了: 如果存在连续的收缩映射 $g: D^n \to S^{n-1}$, 那么也必定存在光滑映射 $f: D^n \to S^{n-1}$, 使得

$$f(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}. \tag{2.7}$$

设 $q \in S^{n-1}$ 是 f 的一个正则值, 考察 D^n 的子集 $f^{-1}(q)$. 根据第五章定理 5.3(带边情形的正则值原像定理), $f^{-1}(q)$ 是 D^n 的 1 维正则 C^∞ 子流形, 并且

$$\partial f^{-1}(q) = f^{-1}(q) \cap \partial D^n.$$

作为 D^n 的闭子集, $f^{-1}(q)$ 是紧致的 1 维流形. 根据本章定理 1.8, 紧致 1 维微分流形 $f^{-1}(q)$ 的边界 $\partial f^{-1}(q)$ 应由偶数个点组成. 然而, 从(2.7)式可以看出:

$$\partial f^{-1}(q) = f^{-1}(q) \cap \partial D^n = \{q\}.$$

这样，假定存在连续的收缩映射 $g: D^n \to S^{n-1}$ 最终导致了矛盾的结果. □

定理 2.3(Brouwer 不动点定理) 任何连续映射 $f: D^n \to D^n$ 都必定有不动点. 即必定存在 $x_0 \in D^n$，使得

$$f(x_0) = x_0.$$

证明 用反证法. 假定存在没有不动点的连续映射

$$f: D^n \to D^n.$$

对任意的 $x \in D^n$，我们以 $f(x)$ 为起始点，经过 x 点作射线，将该射线与 $\partial D^n = S^{n-1}$ 的交点记为 $g(x)$. 这样定义的连续映射

$$g: D^n \to S^{n-1},$$

显然使得

$$g(x) = x, \quad \forall x \in S^{n-1}.$$

但这与定理 2.2 的结论矛盾.（关于映射 g 的连续性，请参看下面的附注.） □

附注 上面证明中所定义的 $g(x)$ 可以表示为

$$g(x) = f(x) + t(x - f(x)),$$

其中的 $t = t(x) > 0$ 使得 $\|g(x)\|^2 = 1$，即使得

$$a(x)t^2 + 2b(x)t + c(x) = 0, \tag{2.8}$$

这里

$$a(x) = \|x - f(x)\|^2 > 0, \quad b(x) = (x - f(x)) \cdot f(x),$$
$$c(x) = \|f(x)\|^2 - 1 \leqslant 0.$$

对于使得 $c(x) < 0$ 的 $x \in D^n$，方程(2.8)的惟一正根是：

$$t(x) = \frac{-b(x) + \sqrt{(b(x))^2 - a(x)c(x)}}{a(x)}. \tag{2.9}$$

对于使得 $c(x) = \|f(x)\|^2 - 1 = 0$ 的 $x \in D^n$，我们有

$$\begin{aligned} b(x) &= (x - f(x)) \cdot f(x) \\ &= x \cdot f(x) - \|f(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$= x \cdot f(x) - 1 < 0.$$

(这里用到 $f(x) \neq x$ 的假定.)对这情形方程(2.8)也有惟一正根

$$t(x) = -2b(x)/a(x), \tag{2.10}$$

并且这时(2.10)式与(2.9)式是一致的.

因为由(2.9)式所定义的函数 $t(x)$ 是连续的,所以

$$g(x) = f(x) + t(x)(x - f(x))$$

定义了一个连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$. □

练 习 G

G.1. 设 $E = D^n \setminus \{0\}$. 试举例说明 $f \in C^0(E, E)$ 可以没有不动点.

G.2. 设 X 是拓扑空间, $f \in C^0(X, D^n)$, $g \in C^0(D^n, X)$. 试证 $g \circ f: X \to X$ 必有不动点.

G.3. 设 $f \in C^0(S^n, S^n)$, $f(S^n) \neq S^n$. 试证 f 必有不动点.

G.4. 试证以下各命题相互等价:

(1) 关于 D^n 的 Brouwer 不动点定理;

(2) S^{n-1} 不是可缩空间(即 S^{n-1} 的恒同映射不能同伦于常值映射);

(3) S^{n-1} 不是 D^n 的收缩核.

G.5. 设 $f \in C^0(D^n, \boldsymbol{R}^n)$. 试证: 或者存在 $x_0 \in D^n$ 使得 $f(x_0) = x_0$; 或者存在 $y_0 \in \partial D^n$ 和 $\lambda > 1$, 使得 $f(y_0) = \lambda y_0$.

G.6. 设 $f \in C^0(D^n, D^n)$, $0 \notin f(D^n)$. 试证存在 $x_0, y_0 \in \partial D^n$ 和 $\lambda > 0$, $\mu < 0$, 使得

$$f(x_0) = \lambda x_0, \quad f(y_0) = \mu y_0.$$

G.7. **(Frobenius 定理)** 设 $n \times n$ 非退化方阵 A 的所有元素都是非负实数. 求证: A 必有正的本征值.

第八章　模 2 映射度与 Borsuk-Ulam 定理

设 M 和 N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^r(M,N)$. 对于给定的 $y\in N$，人们希望知道方程

$$f(x)=y$$

究竟有多少解？至少希望对解的数目 $\# f^{-1}(y)$ 作一个估计. 因此有必要考察映射 f 覆盖 y 的"重数"或者"层数".

对于 $M=N=S^1$（单位圆周）的情形，我们来观察图 23 所示的映射

$$f: S^1 \to S^1.$$

虽然映射 f 覆盖 $N=S^1$ 各点的"层数"不尽相同，但在正则值处覆盖层数的奇偶性是一样的，或者说覆盖层数 mod 2 是相同的. 如果赋予 M 和 N 适当的定向，考察"正向"的覆盖层数和"负向"的覆盖层数，那么在正则值处覆盖层数的代数和是相同的.

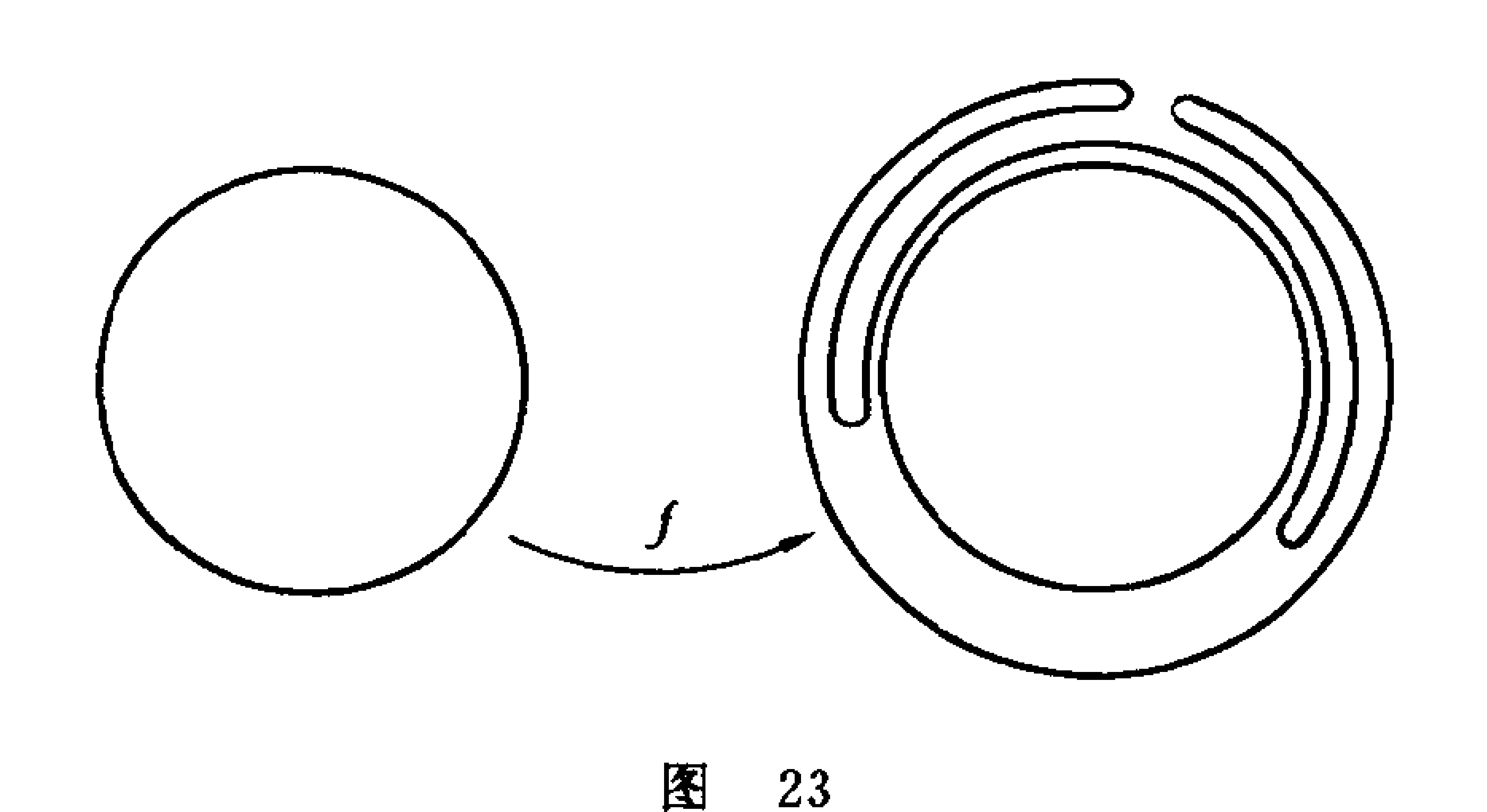


图　23

以上观察为定义映射度提供了启示. 我们将从较简单的模 2 理论开始讨论.

第五章 §1 中证明的“唱片引理”是映射度定义的一块基石. 这里重述该引理,以提请读者注意.

唱片引理 设 $r\geqslant 1$,M 是紧致 C^r 流形,N 是 C^r 流形,$\dim M=\dim N=m$,$f\in C^r(M,N)$,$y\in N$ 是 f 的正则值. 如果

$$f^{-1}(y)\neq\varnothing,$$

那么

(1) $f^{-1}(y)$ 是 M 中的有限点集:

$$f^{-1}(y)=\{x_1,\cdots,x_k\};$$

(2) 存在 y 在 N 中的开邻域 V,使得 $f^{-1}(V)$ 是 M 中不相交开集的并集:

$$f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

其中开集 U_i 包含 x_i,并且 f 在 U_i 上的限制映射 $f|U_i$ 是从 U_i 到 V 的 C^r 同胚($i=1,\cdots,k$).

一般约定 在本章中,我们设 M 是(不带边的)紧致光滑流形,N 是(不带边的)光滑流形,$\dim M=\dim N$. 还约定以记号

$$f\pitchfork y$$

表示 y 是可微映射 f 的正则值.

§1 模 2 映射度

先来考察光滑映射 f 对其正则值 y 的模 2 覆盖层数.

定义 1.1 设 M 是紧致光滑流形,N 是光滑流形,$\dim M=\dim N$,$f\in C^\infty(M,N)$. 对于 f 的正则值 y,我们约定把

$$\# f^{-1}(y)\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

叫做 f 对 y 的模 2 覆盖层数或模 2 映射度,记为 $\deg_2(f,y)$(常简写成 $d_2(f,y)$).

附注 上面定义中的记号 $\# f^{-1}(y)$ 表示集合 $f^{-1}(y)$ 中的元素数目，而 $\# f^{-1}(y) \pmod 2$ 表示 $\# f^{-1}(y)$ 除以 2 的最小非负剩余（0 或者 1）.

根据"唱片引理"，这样定义的 $d_2(f,y)$ 关于 $y \in N$ 是局部常值函数. 即对于 y 的某个邻域内的所有的 z 都有

$$f \pitchfork z, \quad d_2(f,z) = d_2(f,y).$$

引理 1.2 设存在紧致带边流形 X 和光滑映射 $F: X \to N$，使得

$$\partial X = M, \quad \partial F = F|M = f.$$

如果 y 是 F 和 $f = \partial F$ 共同的正则值，那么

$$d_2(f,y) = 0.$$

证明 $F^{-1}(y)$ 是紧致的 1 维光滑流形，它的每个连通分支或者同胚于 S^1，或者同胚于 $[0,1]$. 同胚于 S^1 的连通分支不与 $\partial X = M$ 相交；同胚于 $[0,1]$ 的每个连通分支与 $\partial X = M$ 相交于两点. 又因为 $f^{-1}(y) = F^{-1}(y) \cap \partial X$，所以 $\# f^{-1}(y)$ 是偶数，即 $d_2(f,y) = 0$（参看图 24）. □

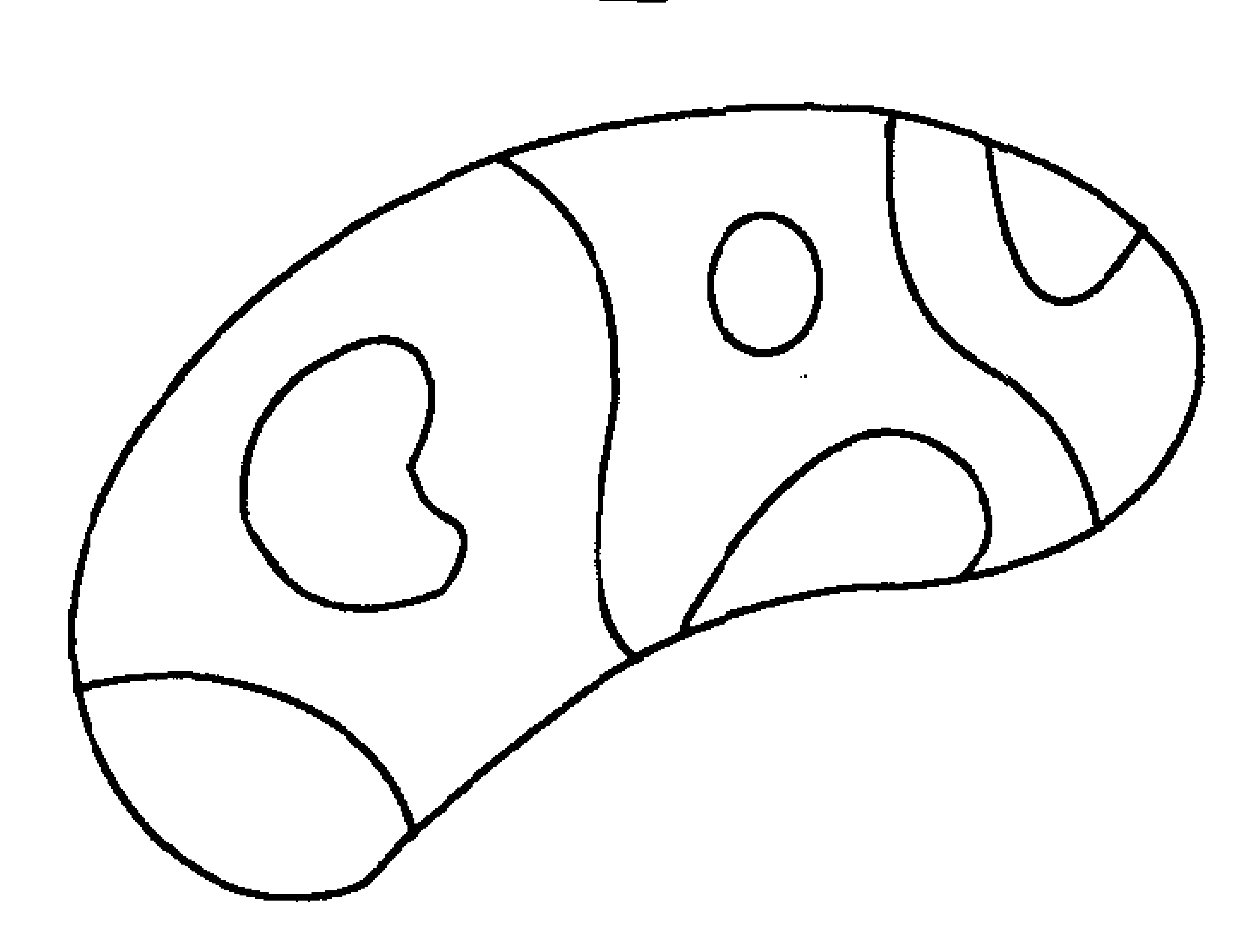


图 24

引理 1.3 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$，$y\in N$，$f_i\in C^\infty(M,N)(i=1,2)$，并且

$$f_1 \pitchfork y, \quad f_2 \pitchfork y.$$

如果 $f_1\sim f_2$（C^0 同伦），那么

$$d_2(f_1,y)=d_2(f_2,y).$$

证明 f_1 连续同伦于 f_2，它也就必定光滑同伦于 f_2，即存在光滑映射 $H: I\times M\to N$，使得

$$H(t,\cdot)=f_1(\cdot), \quad \forall t\in[0,\delta],$$

$$H(t,\cdot)=f_2(\cdot), \quad \forall t\in[1-\delta,1].$$

因为 H 在 $([0,\delta]\times M)\cup([1-\delta,1]\times M)$ 与 y 横截，根据横截扩张定理，存在光滑映射 $F: I\times M\to N$，使得

(1) $F(t,x)=H(t,x), \quad \forall t\in[0,\delta]\cup[1-\delta,1],\ x\in M$；

(2) $F\pitchfork y$.

于是，$F^{-1}(y)$ 是 $I\times M$ 的紧致的 1 维正则子流形，它的每个连通分支同胚于 S^1 或者 $[0,1]$，且只有同胚于 $[0,1]$ 的连通分支才与 $\partial(I\times M)=(0\times M)\cup(I\times M)$ 相交. 因为

$$f_1^{-1}(y)=F^{-1}(y)\cap(0\times M),$$

$$f_2^{-1}(y)=F^{-1}(y)\cap(1\times M),$$

所以 $\# f_1^{-1}(y)$ 与 $\# f_2^{-1}(y)$ 的奇偶性相同（参看图 25）. □

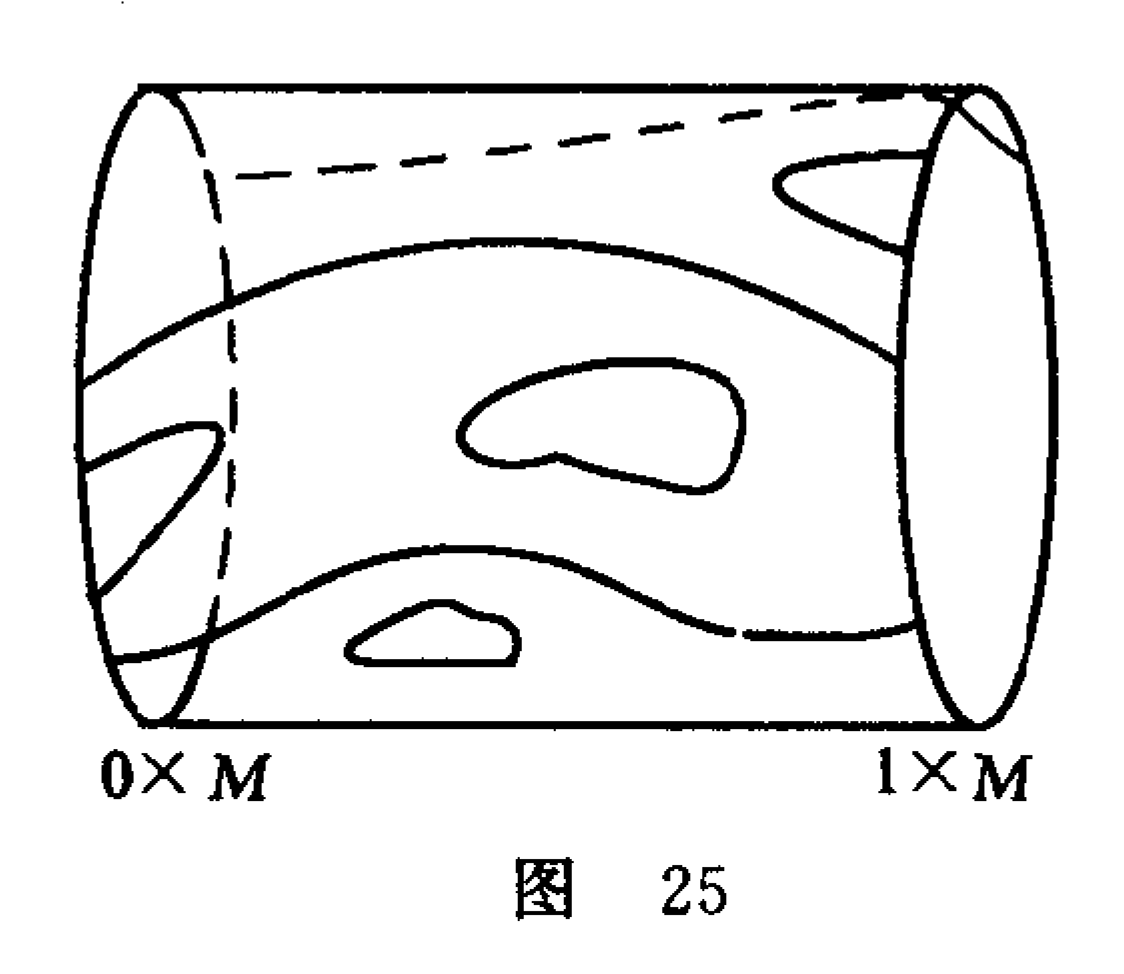


图 25

引理 1.4 设 M 和 N 是光滑流形，$f\in C^0(M,N)$，$y\in N$. 则存在 $f_1\in C^\infty(M,N)$，使得

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

证明 方法一. 首先取光滑映射 $f_0\sim f$. 然后引用横截逼近定理确定存在 $f_1\in C^\infty(M,N)$，使得

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

方法二. 首先取光滑映射 $f_0\sim f$. 其次取 y 的连通开邻域 W，并在 W 中取 f_0 的正则值 z. 然后取同伦于 id 的光滑同胚 $h: M\to M$，使得 $h(z)=y$. 记 $f_1=h\circ f_0$，则有

$$f_1\sim f_0.$$

因为 $f_0\pitchfork z$，所以 $h\circ f_0\pitchfork h(z)$，即 $f_1\pitchfork y$. □

下面，我们来定义连续映射 $f: M\to N$ 对任意的 $y\in N$ 的模 2“覆盖层数”，即模 2 映射度.

定义 1.5 设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$，$y\in N$，并设 $f_1\in C^\infty(M,N)$适合条件

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

我们定义

$$\deg_2(f,y):=\deg_2(f_1,y).$$

记号 $\deg_2(f,y)$也常简写成 $d_2(f,y)$.

命题 1.6 关于 $\deg_2(f,y)$的定义确当无歧义，并且所定义的 $\deg_2(f,y)$关于 f 的同伦是不变的.

证明 (1) 设 $f_i\in C^\infty(M,N)(i=1,2)$适合条件

$$f_i\sim f,\quad f_i\pitchfork y.$$

则有

$$f_1\pitchfork y,\quad f_2\pitchfork y,\quad f_1\sim f_2(C^0\text{ 同伦}).$$

根据引理 1.3,可以断定 $d_2(f_1,y)=d_2(f_2,y)$.

(2) 设 $f\sim g$,并设 $f_1,g_1\in C^\infty(M,N)$适合条件

$$f_1\sim f,\ f_1\pitchfork y;\quad g_1\sim g,\ g_1\pitchfork y.$$

则有

$$f_1\pitchfork y,\quad g_1\pitchfork y,\quad f_1\sim g_1(C^0\text{ 同伦}).$$

于是,根据引理 1.3,$d_2(f_1,y)=d_2(g_1,y)$.这就证明了

$$d_2(f,y)=d_2(g,y).\qquad\square$$

命题 1.7 设 M 和 N 是 C^∞ 流形,$\dim M=\dim N$,M 紧致,N 连通,并设 $f\in C^0(M,N)$.则 $\deg_2(f,y)$不随 $y\in N$ 而改变.即对所有的 $y\in N$,$\deg_2(f,y)$取相同的值.

证明 取 $f_1\in C^\infty(M,N)$,使得

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork y.$$

按照定义,$d_2(f,y)=d_2(f_1,y)$.根据唱片引理,对 y 的某个邻域 V 中所有的 z 都有

$$f_1\pitchfork z,\quad d_2(f_1,z)=d_2(f_1,y).$$

这就证明了 $d_2(f,\cdot):N\to\{0,1\}$是局部常值函数.因而以下两个集合都是 N 中的开集

$$\Omega_0=\{y\in N\,|\,d_2(f,y)=0\},\quad \Omega_1=\{y\in N\,|\,d_2(f,y)=1\}.$$

显然有

$$\Omega_0\cap\Omega_1=\varnothing,\quad \Omega_0\cup\Omega_1=N.$$

由于 N 的连通性,这两个开集之一是空集,另一个就是整个 N.因而 $d_2(f,y)$对所有的 $y\in N$ 取相同的值. $\square$

定义 1.8 设 M 是紧致光滑流形,N 是光滑流形,$\dim M=\dim N$,$f\in C^0(M,N)$.如果 $\deg_2(f,y)$不随 $y\in N$ 而改变(例如 N 是连通光滑流形的情形),那么我们就把

$$\deg_2(f) := \deg_2(f, y)$$

叫做映射 f 的模 2 映射度.

命题 1.9 在定义 1.8 所述的条件下，如果 $f: M \to N$ 不是满映射，那么 $\deg_2(f)=0$. 换言之，如果 $\deg_2(f) \neq 0$，那么 f 必定是满映射.

证明 设 $f: M \to N$ 不是满映射，则存在 $y \in N \setminus f(M)$. 我们取 $f_1 \in C^\infty(M,N)$，$f_1 \sim f$，并且 f_1 在 C^0 意义下充分接近于 f，使得 $y \notin f_1(M)$. 于是有

$$\deg_2(f) = \deg_2(f_1, y) = \# f_1^{-1}(y) = 0. \qquad \square$$

命题 1.10 设 M, N 和 P 是 C^∞ 流形，M 和 N 紧致，N 和 P 连通，并且 $\dim M = \dim N = \dim P$.

(1) 如果 $\varphi \in C^0(M,N)$，$\psi \in C^0(N,P)$，那么

$$\deg_2(\psi \circ \varphi) = \deg_2(\psi) \cdot \deg_2(\varphi).$$

(2) 如果 $\mathrm{id}: M \to M$ 是恒同映射，那么

$$\deg_2(\mathrm{id}) = 1.$$

(3) 如果 $\varphi: M \to N$ 是同胚映射，ψ 是其逆映射，那么

$$\deg_2(\varphi) = \deg_2(\psi) = 1.$$

证明 论断(2)显然成立，因为每个 $y \in M$ 都是 id 的正则值，并且原像只有一点. 论断(3)是(1)和(2)共同的推论. 因此，只有论断(1)尚须证明.

我们来证明论断(1). 不妨设 φ 和 ψ 都是 C^∞ 映射. 取 z 为 $\psi \circ \varphi$ 和 ψ 共同的正则值. 可设 $\psi^{-1}(z) = \{y_1, \cdots, y_\beta\}$，其中每个 y_i 都是 φ 的正则值. 又可设

$$\varphi^{-1}(y_i) = \{x_{(i,1)}, \cdots, x_{(i,\alpha_i)}\}, \quad i = 1, \cdots, \beta.$$

于是

$$(\psi \circ \varphi)^{-1}(z) = \bigcup_{i=1}^{\beta} \{x_{(i,1)}, \cdots, x_{(i,\alpha_i)}\}.$$

根据定义

$$\deg_2(\psi) = \#\psi^{-1}(z) = \beta \pmod 2,$$

$$\deg_2(\varphi) = \#\varphi^{-1}(y_i) = \alpha_i \pmod 2,$$

$$\begin{aligned}\deg_2(\psi \circ \varphi) &= \#((\psi \circ \varphi)^{-1}(z)) \pmod 2 \\ &= \sum_{i=1}^{\beta} \alpha_i \pmod 2 = \beta \deg_2(\varphi) \pmod 2 \\ &= \deg_2(\psi) \cdot \deg_2(\varphi). \qquad \square\end{aligned}$$

利用模 2 映射度，我们给出 Brouwer 不动点定理的另一证明.

定理 1.11（Brouwer 不动点定理） 连续映射 $f: D^n \to D^n$ 必有不动点.

证明 仿照第七章 § 2 中的讨论，可将问题归结到证明这样的事实：任何连续映射 $g: D^n \to S^{n-1}$ 都不能使

$$(g|S^{n-1}) = \mathrm{id}: S^{n-1} \to S^{n-1}.$$

我们用反证法证明这一事实. 假设存在满足上述条件的连续映射 g，则由命题 1.10 的(2)可知

(1.1) $$\deg_2(g|S^{n-1}) = 1.$$

另一方面，因为

$$H(t,x) = g((1-t)x)$$

将 $g|S^{n-1}$ 同伦于常值映射 $g(0)$，所以

(1.2) $$\deg_2(g|S^{n-1}) = 0.$$

我们得到互相矛盾的结果(1.1)和(1.2). $\square$

说明 1.12 设 M 是紧致带边的 C^∞ 流形，N 是无边的 C^∞ 流形，$\dim M = \dim N$，$f \in C^\infty(M,N)$. 如果 $y \in N \setminus f(\partial M)$ 是 f 的正则值，那么原像集 $f^{-1}(y)$ 是包含在 $M \setminus \partial M$ 之中的紧致 0 维流形. “唱片引理”的全部结论适用于这一情形. 因而仍可定义

$$\deg_2(f, y) := \# f^{-1}(y) \pmod 2.$$

在以下的讨论中将会用到这一说明.

§2 模 2 环绕数

一般约定 在本节中,设 M 是紧致无边 C^∞ 流形,$\dim M = n$. 我们约定记

$$D_\varepsilon = D_\varepsilon^{n+1} = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\},$$

$$S_\varepsilon = S_\varepsilon^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\| = \varepsilon\}.$$

但对 S_1^n,仍同以前一样采用标准的记号 S^n,即约定

$$S^n := \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

定义 2.1 设 M 是紧致的无边 C^∞ 流形,并且 $\dim M = n$, $f \in C^0(M, \boldsymbol{R}^{n+1})$,并且设 $z \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus f(M)$. 考察这样一个映射:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \theta : M \to S^n, \\ x \mapsto \dfrac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}. \end{cases}$$

我们定义

$$W_2(f, z) := \deg_2(\theta),$$

并称 $W_2(f, z)$ 为 f 对 z 的**模 2 环绕数**.

引理 2.2 设 M 是紧致的无边 C^∞ 流形,并且 $\dim M = n$, $f \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^{n+1})$,并且设 $z \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus f(M)$. 如果存在紧致带边的 C^∞ 流形 X 和 C^∞ 映射 $F : X \to \boldsymbol{R}^{n+1}$,使得

$$\partial X = M, \quad \partial F = F|M = f, \quad z \notin F(X),$$

那么

$$W_2(f, z) = 0.$$

证明 在引理的条件下,如(2.1)那样定义的 θ 是光滑映射,并可扩充为光滑映射

$$\begin{cases} \Theta: X \to S^n, \\ \qquad x \mapsto \dfrac{F(x)-z}{\|F(x)-z\|}. \end{cases}$$

因为 $\partial\Theta=\Theta|M=\theta$,所以(根据引理 1.2)

$$W_2(f,z)=\deg_2(\theta)=0. \qquad \square$$

引理 2.3 设 $f_i \in C^0(M,\boldsymbol{R}^{n+1})(i=0,1)$并且 $H: f_0 \sim f_1$ 是 C^0 同伦. 如果 $z\in \boldsymbol{R}^{n+1}\setminus H(I\times M)$,那么

$$W_2(f_0,z)=W_2(f_1,z).$$

证明 对 $i=0,1$,我们定义映射

$$\begin{cases} \theta_i: M \to S^n, \\ \qquad x \mapsto \dfrac{f_i(x)-z}{\|f_i(x)-z\|}. \end{cases}$$

然后考察从 θ_0 到 θ_1 的同伦

$$\begin{cases} \Theta: I\times M \to S^n, \\ \qquad (t,x) \mapsto \dfrac{H(t,x)-z}{\|H(t,x)-z\|}. \end{cases}$$

根据引理 1.3,应该有

$$W_2(f_0,z)=\deg_2(\theta_0)=\deg_2(\theta_1)=W_2(f_1,z). \qquad \square$$

引理 2.4 设 M 是 n 维紧致光滑的无边流形,$f\in C^0(M,\boldsymbol{R}^{n+1})$. 如果连续曲线

$$\gamma: J \to \boldsymbol{R}^{n+1}$$

满足条件

$$\gamma(J)\subset \boldsymbol{R}^{n+1}\setminus f(M),$$

那么

$$W_2(f,\gamma(s))=W_2(f,\gamma(0)), \quad \forall s\in J.$$

因而,对于 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus f(M)$同一连通分支中的 z,环绕数$W_2(f,z)$取同样的值.

证明 对于给定的 $s\in J$,考察映射

$$\theta_0(x)=\frac{f(x)-f(0)}{\|f(x)-f(0)\|},\quad \theta_s(x)=\frac{f(x)-f(s)}{\|f(x)-f(s)\|}.$$

我们定义

$$\begin{cases}\Theta: I\times M\to S^n,\\ \quad (t,x)\quad\mapsto \dfrac{f(x)-\gamma(st)}{\|f(x)-\gamma(st)\|}.\end{cases}$$

显然 Θ 使得 θ_0 同伦于 θ_s. 因而

$$\begin{aligned}W_2(f,\gamma(s))&=\deg_2\theta_s\\&=\deg_2\theta_0=W_2(f,\gamma(0)).\end{aligned}\qquad\square$$

引理 2.5 设 U 和 V 都是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中含有 0 点的开集,$F:U\to V$ 是微分同胚,$F(0)=0$. 则只要 $\varepsilon>0$ 足够小,就必定有

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=1,$$

这里 $\qquad S_\varepsilon=S_\varepsilon^n=\{x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid\|x\|=\varepsilon\}.$

证明 记 $A=\mathrm{D}F(0)$,则 A 是非退化线性映射. 可设

$$\inf\{\|A\xi\|\mid\xi\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ \|\xi\|=1\}=\sigma>0.$$

容易看到

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad\forall x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}.$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小,使得只要 $0<\|x\|\leqslant\varepsilon$,就有 $\|F(x)-Ax\|<\sigma\|x\|$. 于是,对于 $x\in S_\varepsilon$ 和 $t\in[0,1]$,应有

$$Ax+t(F(x)-Ax)\neq 0.$$

因而可定义

$$H(t,x)=\frac{Ax+t(F(x)-Ax)}{\|Ax+t(F(x)-Ax)\|}.$$

这样定义的 $H:I\times S_\varepsilon\to S^n$ 是从映射 $\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$ 到映射 $\dfrac{F(x)}{\|F(x)\|}$ 的同伦:

$$H(0,x)=\frac{Ax}{\|Ax\|},$$

$$H(1,x)=\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

因而这两个映射的映射度应相等，即

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=W_2(A|S_\varepsilon,0).$$

我们来考察（这里采取一目了然但却不那么正式的写法）映射

(2.2) $$\frac{Ax}{\|Ax\|}:S_\varepsilon^n\to S^n.$$

容易看出，(2.2)的逆映射是

(2.3) $$\varepsilon\frac{A^{-1}\xi}{\|A^{-1}\xi\|}:S^n\to S_\varepsilon^n.$$

因此，由(2.2)定义的映射是一个同胚. 根据命题 1.10 的(3)，可以断定该映射的模 2 映射度等于 1. 由此得知

$$W_2(F|S_\varepsilon,0)=W_2(A|S_\varepsilon,0)=1. \qquad \square$$

定理 2.6 设 X 是紧致带边光滑流形，$\dim X=n+1$，$F\in C^\infty(X,\boldsymbol{R}^{n+1})$. 如果 $z\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus F(\partial X)$是 F 的正则值，那么

$$W_2(\partial F,z)=\deg_2(F,z).$$

证明 为书写简便，不妨设 $z=0$（于是 $z=0$ 是 F 的正则值）. 根据“唱片引理”，存在 0 点的开邻域 V，使得 $F^{-1}(V)$是不相交的开集之并：

$$F^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k,$$

并且使得 $F|U_i:U_i\to V$ 是光滑同胚($i=1,\cdots,k$). 不妨设

$$F^{-1}(0)=\{x_1,\cdots,x_k\},$$

其中 $x_i\in U_i(i=1,\cdots,k)$. 我们约定用记号“$\approx$”表示“光滑同胚于”. 根据引理 2.4，可取围绕 x_i 的足够小的闭邻域 $D_i\subset U_i$，D_i

$\approx D_\varepsilon^{n+1}$，其边缘 $C_i \approx S_\varepsilon^n$ 使得

$$W_2(F|C_i,0) = 1, \quad i = 1,\cdots,k. \tag{2.4}$$

考察带边流形

$$Y = X \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{int} D_i \right).$$

Y 的边缘为

$$\partial Y = \partial X \cup \bigcup_{i=1}^{k} \partial D_i. \tag{2.5}$$

因为 $F(Y) \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \backslash \{0\}$，所以（根据引理 2.2）

$$W_2(F|\partial Y,0) = 0. \tag{2.6}$$

在下面的讨论中，所进行的相加或连加运算都是模 2 意义下的加法运算. 这种加法规定：

$$0+0=1+1=0,$$

$$0+1=1+0=1.$$

根据(2.5)，我们可以将(2.6)写成

$$W_2(F|\partial X,0) + \sum_{i=1}^{k} W_2(F|C_i,0) = 0.$$

据此，并引用(2.4)，就得到

$$\begin{aligned} W_2(F|\partial X,0) &= \sum_{i=1}^{k} W_2(F|C_i,0) \\ &= k \qquad \pmod 2 \\ &= \# F^{-1}(0) \pmod 2 \\ &= \deg_2(F,0). \qquad \square \end{aligned}$$

附注 上面的定理使我们可以依据 F 沿边界 ∂X 对 z 的环绕情形计算 F 在 X 中对 z 的模 2 覆盖层数. 可以想见，这定理将是很有用的. 通过考察映射沿边界的性态，了解映射在区域内部的情况，这样的做法在数学的各分支中屡见不鲜.

§ 3 Borsuk-Ulam 定理

定义 3.1 (1) 集合 $D\subset \mathbf{R}^s$ 被称为**对称子集**，倘若 $D=-D$，也就是

$$x\in D \Longleftrightarrow -x\in D.$$

(2) 设 D 是 $\mathbf{R}^s$ 中的对称子集，E 是 $\mathbf{R}^t$ 中的对称子集. 映射 $f: D\to E$ 被称为**奇映射**，倘若

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in D.$$

著名的 Borsuk-Ulam 定理断定：如果 $f: S^n\to S^n$ 是连续的奇映射，那么

$$\deg_2(f)=1.$$

换句话说，任何连续奇映射 $f: S^n\to S^n$ 的覆盖层数都必定是奇数.

为了证明这一定理，先作一些准备.

引理 3.2 对于任何奇映射 $f\in C^0(S^n,S^n)$，存在奇映射 $\tilde{f}\in C^\infty(S^n,S^n)$，使得 $\tilde{f}\sim f$.

证明 首先取逼近 $f: S^n\to S^n\subset \mathbf{R}^{n+1}$ 的光滑映射 $f_0: S^n\to \mathbf{R}^{n+1}$，使得

$$\|f_0(x)-f(x)\|<\varepsilon<1/2,\quad \forall x\in S^n.$$

于是也有

$$\|f_0(-x)-f(-x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in S^n.$$

然后取

$$f_1(x)=\frac{f_0(x)-f_0(-x)}{2}.$$

则 $f_1: S^n\to \mathbf{R}^{n+1}$ 是光滑的奇映射，并且

$$\|f_1(x)-f(x)\|<\varepsilon,\quad \forall x\in S^n.$$

如果记

$$\tilde{f}(x) = \frac{f_1(x)}{\|f_1(x)\|}, \quad x \in S^n;$$

$$H(t,x) = \frac{f(x) + t(f_1(x) - f(x))}{\|f(x) + t(f_1(x) - f(x))\|}, \quad (t,x) \in I \times S^n,$$

那么 $\tilde{f}: S^n \to S^n$ 是光滑的奇映射，并且 $H: I \times S^n \to S^n$ 将 f 同伦于 $\tilde{f}$. □

关于 0 维流形的若干说明 我们将从 0 维情形出发，采用归纳法证明 Borsuk-Ulam 定理. 为此，先要对 0 维流形作若干说明和约定.

按照定义，0 维流形由一些离散的点组成（即为赋有离散拓扑的点集）. 设 M 是 0 维流形或是任意维的光滑流形，N 是 0 维流形. 对此情形，任何映射

$$f: M \to N$$

都被认为是任意次连续可微的（即光滑的），任何一个 $y \in N$ 都被认为是 f 的正则值. 因而，对于 M 是紧致 0 维流形，N 是 0 维流形，$y \in N$ 这样的情形，仍然可以定义

$$\deg_2(f,y) = \# f^{-1}(y) (\mathrm{mod}\, 2).$$

若 N 是连通的 0 维流形，则 $N = \{y\}$ 由单个点组成. 对此当然可以定义

$$\deg_2(f) = \deg_2(f,y).$$

但这情形似乎过于平凡. 下面的(1)和(2)将稍作推广.

(1) 考察 0 维球面

$$S^0 := \{-1, 1\}.$$

如果 $f: S^0 \to S^0$ 是单映射，那么

$$\# f^{-1}(-1) = \# f^{-1}(1) = 1.$$

对此情形，我们定义

$$\deg_2(f) = 1.$$

如果 $f: S^0 \to S^0$ 不是单映射,那么 $f^{-1}(-1)$与 $f^{-1}(1)$二者之一是二元集合,另一是空集合,因而

$$\# f^{-1}(-1) = \# f^{-1}(1) = 0 \pmod 2.$$

对此情形,我们定义

$$\deg_2(f) = 0.$$

(2) 还可以对(1)中的约定作进一步的扩充.考察这样的情形:M 和 N 都是 0 维流形,其中 M 由偶数个点组成,而 $N=\{y_-, y_+\}$由两个点组成.对于任意的映射 $f: M \to N$,显然有

$$f^{-1}(y_-) \cup f^{-1}(y_+) = M,$$

因而

$$\# f^{-1}(y_-) + \# f^{-1}(y_+) = 0 \pmod 2.$$

对此情形,我们定义

$$\deg_2(f) = \# f^{-1}(y_-) = \# f^{-1}(y_+) \pmod 2.$$

(3) 对(2)中所述的情形定义了模 2 映射度之后,可以进一步讨论相应的模 2 环绕数.设 M 是由偶数个点组成的 0 维流形.考察连续映射 $f: M \to \mathbf{R} \setminus \{z\}$.我们构造这样一个映射

$$\theta: M \to S^0,$$

$$x \mapsto \frac{x - z}{|x - z|},$$

并定义

$$W_2(f, z) = \deg_2(\theta).$$

(4) 在下面的讨论中,将要涉及到的重要典型情形是:$M = S^0 = \{-1, 1\}$,$F \in C^\infty(D^1, \mathbf{R}^1)$,$f = \partial F$.如果

$$F \pitchfork 0, \quad F(S^0) \subset \mathbf{R}^1 \setminus \{0\},$$

那么

$$\deg_2(F,0) = W_2(f,0).$$

(5) 作了上面一些必要的约定之后,可以断定:上节的引理 2.2,引理 2.5 和定理 2.6 对于 $n=0$ 的情形仍然成立(请读者自行验证).

引理 3.3 对于 $n\in N\cup\{0\}$,以下的两个论断$(\mathrm{BU})_n$ 和$(\mathrm{BU})'_n$ 相互等价.

$(\mathrm{BU})_n$ 对任何奇映射 $f\in C^\infty(S^n,S^n)$有

$$\deg_2(f) = 1.$$

$(\mathrm{BU})'_n$ 对任何奇映射 $g\in C^\infty(S^n,\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash 0)$有

$$W_2(g,0) = 1.$$

证明 先证"$(\mathrm{BU})_n \Longrightarrow (\mathrm{BU})'_n$".对于任意给定的光滑奇映射 $g: S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$,我们记

$$f(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}.$$

则 $f: S^n\to S^n$ 仍是光滑的奇映射.假定$(\mathrm{BU})_n$ 成立,就得到

$$W_2(g,0) = \deg_2(f) = 1.$$

再来证明"$(\mathrm{BU})'_n \Longrightarrow (\mathrm{BU})_n$".任意光滑的奇映射 $f: S^n\to S^n$ 可以看成从 S^n 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$的光滑奇映射:

$$f: S^n \to S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\Big\backslash\{0\}.$$

假定$(\mathrm{BU})'_n$ 成立,就得到

$$\deg_2(f) = W_2(f,0) = 1. \qquad \square$$

定理 3.4(Borsuk-Ulam) 如果 $f: S^n\to S^n$ 是连续奇映射,那么

$$\deg_2(f) = 1.$$

证明 根据引理 3.2,只须对光滑的奇映射 $f: S^n\to S^n$ 证

明定理的结论. 根据引理 3.3, 只须证明等价的两个论断$(BU)_n$和$(BU)'_n$之一成立. 我们将用归纳法完成这一证明.

首先考察$S^0=\{-1,1\}$. 容易看到, 任何奇映射$f_0: S^0\to S^0$都是同胚, 因而$\deg_2(f_0)=1$. 这证明了$(BU)_0$和$(BU)_0'$成立.

现在假设$(BU)'_n$成立, 往证$(BU)_{n+1}$成立. 考察任意的光滑奇映射$f: S^{n+1}\to S^{n+1}$. 我们把S^n看作S^{n+1}的"赤道", 于是$S^n\subset S^{n+1}$. 因为$E=f(S^n)\cup f(C(f))$是S^{n+1}中的零测集, 所以必定存在

$$a\in S^{n+1}\setminus(E\cup(-E)).$$

我们记$p_+=a, p_-=-a$. 则p_+和p_-都不在$f(S^n)$上, 并且p_+和p_-都是f的正则值. 设Π是$\boldsymbol{R}^{n+2}$中垂直平分线段$\overline{p_-p_+}$的$n+1$维子空间, $\pi: \boldsymbol{R}^{n+2}\to\Pi$是从$\boldsymbol{R}^{n+2}$到$\Pi$的垂直投影. 因为$\boldsymbol{R}^{n+2}$的正交变换显然是$C^\infty$同胚, 所以不妨设$\Pi$就是子空间$\boldsymbol{R}^{n+1}\times 0\approx\boldsymbol{R}^{n+1}$. 考察

$$g=\pi\circ f: S^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}.$$

显然g仍是光滑的奇映射, 并且

$$g(S^n)\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

球面S^{n+1}是以"赤道"S^n为公共边界的两个半球面(带边流形)S^{n+1}_+和S^{n+1}_-的并集. 利用f的奇映射性质并引用归纳假设, 我们可以按照下面的办法算出f的模 2 映射度(所涉及的相加运算都是模 2 加法):

$$\begin{aligned}\deg_2(f)&=\deg_2(f,p_+)\\&=\deg_2(f|S^{n+1}_+,p_+)+\deg_2(f|S^{n+1}_-,p_+)\\&=\deg_2(f|S^{n+1}_+,p_+)+\deg_2(f|S^{n+1}_+,p_-)\\&=\deg_2(g|S^{n+1}_+,0)=W_2(g|S^n,0)=1.\qquad\square\end{aligned}$$

练 习 H

H.1. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$适合条件 $f(-x)=f(x)$,$\forall\ x\in S^n$,试证

$$\deg_2(f)=0.$$

H.2. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$. 试证:

(1) (Hirsch) 如果 $\deg_2(f)=1$,那么存在 $x_0\in S^n$,使得

$$f(-x_0)=-f(x_0);$$

(2) (Borsuk) 如果 $\deg_2(f)=0$,那么存在 $x_0\in S^n$,使得

$$f(-x_0)=f(x_0).$$

H.3. 设 $F\in C^0(D^n,\boldsymbol{R}^n)$适合条件 $F(-x)=-F(x)$,$\forall x\in\partial D^n$. 试证 F 必有不动点.

H.4. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$适合条件 $\deg_2(f)=0$. 试证存在 $x_0,y_0\in S^n$,使得 $f(x_0)=x_0$,$f(y_0)=-y_0$.

H.5. 设 $n>k\geqslant 1$. 则不存在从 S^n 到 S^k 的连续奇映射.

H.6. 设 $f\in C^0(S^n,\boldsymbol{R}^n)$是奇映射,则存在 $x_0\in S^n$,使得

$$f(x_0)=0.$$

H.7. 设 $f\in C^0(S^n,\boldsymbol{R}^n)$,试证存在 $x_0\in S^n$,使得 $f(-x_0)=f(x_0)$.

H.8. (维数的不变性)设 $m>n$. 则 $\boldsymbol{R}^m$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 不可能同胚.

H.9. (Lusternik-Schnirelmann) 设 $n+1$ 个闭集 $F_0,\cdots,F_n$ 覆盖了 S^n,则至少有其中的某个闭集包含有一双对径点.

H.10. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$适合条件 $f(-x)\neq f(x)$,$\forall\ x\in S^n$. 试证 f 是满映射.

H.11. "区域不变性定理": 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,$f\in C^0(\Omega,\boldsymbol{R}^n)$是局部单一映射,则 f 是一个开映射.

借助于 Borsuk-Ulam 定理,循以下线索可以作出"区域不

变性定理"的一个证明.

(1) 设 $D=D_{\varepsilon}^{n}$ 是 $\boldsymbol{R}^{n}$ 中以 0 为中心，ε 为半径的闭球体，$g\in C^{0}(D,\boldsymbol{R}^{n})$ 是单一映射，$g(0)=0$. 约定记

$$G(t,x)=g\left(\frac{x}{1+t}\right)-g\left(-\frac{tx}{1+t}\right),\quad (t,x)\in[0,1]\times D.$$

则有

$$G([0,1]\times\partial D)\subset\boldsymbol{R}^{n}\setminus\{0\}.$$

(2) 假设条件与记号如(1)中所述，并约定记 $g_1(\cdot)=G(1,\cdot)$，则有

$$W_2(g,\partial D,0)=W_2(g_1,\partial D,0)=1.$$

因为 $0\notin g(\partial D)$，可设 0 与 $g(\partial D)$ 的距离

$$\operatorname{dist}(0,g(\partial D))=2\eta>0.$$

于是，对于任何一个 $y\in D_{\eta}^{n}$ 都必定有

$$W_2(g,\partial D,y)=W_2(g,\partial D,0)=1.$$

据此证明：$g(D)\supset D_{\eta}^{n}$.

(3) "区域不变性定理". 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^{n}$ 中的开集，$f\in C^{0}(\Omega,\boldsymbol{R}^{n})$ 是局部单一映射. 如果 $x_0\in\Omega$，$f(x_0)=y_0$，那么存在 x_0 的开邻域 $U\subset\Omega$，使得 $f(U)$ 包含 y_0 的一个开邻域 V.

H. 12. 设 $f\in C^{0}(\boldsymbol{R}^{n},\boldsymbol{R}^{n})$ 是局部单一映射，适合条件

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=\infty.$$

试证 $f(\boldsymbol{R}^{n})=\boldsymbol{R}^{n}$.

第九章　定向映射度与 Hopf 定理

§1　可定向流形

定义 1.1　设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，$f \in C^r(U, \boldsymbol{R}^m)(r \geqslant 1)$. 如果

$$\det(\mathrm{D}f(x)) > 0, \quad \forall x \in U,$$

那么我们就称 f 为**保持定向的 C^r 映射**.

定义 1.2　(1) 设 M 是 C^r 流形 $(r \geqslant 1)$，$\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 M 的 C^r 图汇. 如果对于任何使得 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 的 α 和 $\beta(\in \Lambda)$，局部坐标变换

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \boldsymbol{R}^m$$

都是保持定向的 C^r 映射，那么我们就称 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 M 的**定向 C^r 图汇**. M 的两个定向 C^r 图汇被称为是定向相容的，倘若这两个图汇合并在一起仍组成一个定向 C^r 图汇.

(2) 具有定向 C^r 图汇的流形 M 被称为**可定向 C^r 流形**. 选定一个定向 C^r 图汇就给定 M 一个定向. 彼此定向相容的 C^r 图汇决定相同的定向.

(3) 设 M 是一个定向 C^r 流形，$\mathscr{A}$ 是决定 M 定向的 C^r 图汇，(U, φ) 是 M 的任意一个 C^r 图卡. 如果 $\mathscr{A} \cup \{(U, \varphi)\}$ 仍是 M 的定向 C^r 图汇，那么我们就把 (U, φ) 叫做 M 的一个**正向 C^r 图卡**.

(4) 设 $\mathscr{A}$ 是决定 M 定向的一个 C^r 图汇. 如果将 $\mathscr{A}$ 中所有图卡的第一个坐标(或最后一个坐标)统统改变符号，那么仍能得到一个定向 C^r 图汇. 这样得到的图汇所决定的定向被称为是原定向的**相反定向**.

带边流形的定向以及该定向在边缘流形上的诱导定向，对以下的讨论将起非常重要的作用. 这里需要对带边流形的定向作较详细的说明. 首先，回顾约定的记号：

$$\boldsymbol{R}_{+}^{1+n} := \{(u^0, u^1, \cdots, u^n) \in \boldsymbol{R}^{1+n} \mid u^0 \geqslant 0\},$$

$$\boldsymbol{R}_{-}^{1+n} := \{(u^0, u^1, \cdots, u^n) \in \boldsymbol{R}^{1+n} \mid u^0 \leqslant 0\}.$$

定义 1.3 设 X 是满足第二可数公理的 Hausdorff 拓扑空间.

(1) 以下情形(a)或(b)所叙述的(U,φ)都被称为是 X 的图卡：

(a) U 是 X 中的开集，$\varphi: U \to \boldsymbol{R}_{+}^{1+n}$是从 U 到 $\boldsymbol{R}_{+}^{1+n}$中开集的同胚. 这样的(U,φ)被称做 X 的"$\boldsymbol{R}_{+}^{1+n}$型"图卡.

(b) U 是 X 中的开集，$\varphi: U \to \boldsymbol{R}_{-}^{1+n}$是从 U 到 $\boldsymbol{R}_{-}^{1+n}$中开集的同胚. 这样的(U,φ)被称做 X 的"$\boldsymbol{R}_{-}^{1+n}$型"图卡.

(2) 设 $r \geqslant 1$. X 的两个图卡(U,φ)和(V,ψ)被称为是 C^r 相容的(定向 C^r 相容的)，倘若有以下两种情形之一成立：

(a) 或者 $U \cap V = \varnothing$，

(b) 或者 $U \cap V \neq \varnothing$，并且坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

和

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

都是 C^r 映射(保持定向的 C^r 映射).

(3) X 的一族图卡 $\mathscr{A} = \{(U,\varphi)\}$ 被称为是 X 的 C^r 图汇(定向 C^r 图汇)，倘若

(a) $\mathscr{A}$ 中各图卡的定义域覆盖了 X；

(b) $\mathscr{A}$ 中任意两个图卡都是 C^r 相容的(定向 C^r 相容的).

(4) 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 X 的两个 C^r 图汇(定向 C^r 图汇). 若 $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ 仍是 X 的 C^r 图汇(定向 C^r 图汇)，则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 C^r 相

容的(定向 C^r 相容的).

(5) X 连同一个给定的 C^r 图汇 $\mathscr{A}$ 被称为一个 C^r 流形. 设 X 是 C^r 流形, $\mathscr{A}$ 是给定其 C^r 结构的图汇, $x\in X$. 如果存在与 $\mathscr{A}$ 中各图卡 C^r 相容的图卡 (U,φ), 使得 $\varphi(x)\in 0\times \boldsymbol{R}^n$, 那么我们就称 x 为 X 的边缘点. X 的全体边缘点的集合记为 ∂X.

(6) X 连同一个给定的定向 C^r 图汇 $\mathscr{A}$ 被称为一个定向 C^r 流形. $\mathscr{A}$ 赋予 X 确定的定向. 彼此定向相容的 C^r 图汇给出相同的定向.

(7) 设 X 是一个定向 C^r 流形, $\mathscr{A}$ 是确定 X 定向的 C^r 图汇, (U,φ) 是 X 的任意一个图卡. 如果 (U,φ) 与 $\mathscr{A}$ 中所有的图卡定向 C^r 相容, 那么我们就称 (U,φ) 为 X 的正向 C^r 图卡, 并称 φ 为 X 的正向局部坐标.

附记 只要不涉及定向, "$\boldsymbol{R}_+^{1+n}$"型图卡与"$\boldsymbol{R}_-^{1+n}$"型图卡几乎没有差别. 引进两种类型的图卡表面看来似乎没有必要. 但是, 对于涉及定向的讨论, 引进两种类型的图卡就有其必要性. 即使对于 $I=[0,1]$ 这样简单的 1 维带边流形, 仅仅用"$\boldsymbol{R}_+^1$"型图卡也无法赋予它定向. 涉及同伦的讨论, 将涉及 $I\times M$ 的乘积定向, 当然也就要涉及 $I=[0,1]$ 的定向. 因此有必要引进两种类型的图卡, 深入思考定向问题.

命题 1.4 1 维微分流形可定向.

证明 不妨设所给的 1 维微分流形是连通的. 根据第七章的引理 1.4, 存在覆盖这流形的参数表示. 参数增加的方向就决定了流形的一个定向. □

命题 1.5 设 X 是 $1+n$ 维定向带边微分流形 $(n\geqslant 1)$. 则 X 的正向"$\boldsymbol{R}_+^{1+n}$型"局部坐标系(正向"$\boldsymbol{R}_-^{1+n}$型"局部坐标系)在边缘 ∂X 的连通分支上诱导出确定的"内向型"定向("外向型"定向).

证明 设 $p\in\partial X$. 对于 X 在 p 点邻近的任意两个正向

“$\boldsymbol{R}_+^{1+n}$型”局部坐标系$(u^0,u^1,\cdots,u^n)$和$(v^0,v^1,\cdots,v^n)$，必有

$$\frac{\partial(v^0,v^1,\cdots,v^n)}{\partial(u^0,u^1,\cdots,u^n)}>0. \tag{1.1}$$

因为在边缘点处

$$\frac{v^0-0}{u^0-0}>0 \Longrightarrow \frac{\partial v^0}{\partial u^0}\geqslant 0,$$

$$v^0(0,u^1,\cdots,u^n)=0 \Longrightarrow \frac{\partial v^0}{\partial u^j}=0,\ j=1,\cdots,n,$$

并且(1.1)式可以写成

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial v^0}{\partial u^0} & & 0 & \\ & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial v^1}{\partial u^n} \\ * & \vdots & & \vdots \\ & \dfrac{\partial v^n}{\partial u^1} & \cdots & \dfrac{\partial v^n}{\partial u^n} \end{vmatrix}>0,$$

所以在各边缘点处必有

$$\frac{\partial(v^1,\cdots,v^n)}{\partial(u^1,\cdots,u^n)}>0.$$

于是，X 的正向“$\boldsymbol{R}_+^{1+n}$型”局部坐标系的后 n 个坐标赋予 ∂X 的连通分支确定的定向. 我们称这定向为“内向型”诱导定向.

再考察 X 在边缘点处的正向“$\boldsymbol{R}_-^{1+n}$型”局部坐标系. 这种正向局部坐标系的后 n 个坐标也赋予 ∂X 的连通分支确定的定向. 这样的定向被称为“外向型”诱导定向. □

命题 1.6 设 $r\geqslant 1$，并设

(1) X 是 $1+n$ 维定向带边 C^r 流形；

(2) Y 是 n 维定向无边 C^r 流形；

(3) $F\in C^r(X,Y)$，$y\in F(X)$是 F 与 ∂F 共同的正则值，即

$$F \pitchfork y, \quad \partial F \pitchfork y;$$

(4) $Z=F^{-1}(y)$是 X 中的紧致集，

则存在 Y 在 y 点邻近的正向局部坐标图卡(V,ψ)和覆盖了 Z 的有限个 X 的正向局部坐标图卡$\{(U,\varphi)\}$，其中 $\varphi=(\varphi^0,\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$，使得

(a) $\psi(y)=0$；

(b) $\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(u^0,u^1,\cdots,u^n)=(u^1,\cdots,u^n)$；

(c) $\{(U\cap Z,\varphi^0|Z)\}$是 Z 的一个定向 C^r 图汇；

(d) $Z\cap\partial X$ 由偶数个点组成；恰好在其中半数个点处，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$给出的 ∂X 的局部坐标系属“内向型”诱导定向；而在另外半数个点处，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$给出的 ∂X 的局部坐标系属于“外向型”诱导定向.（在 Z 的每个同胚于$[0,1]$的连通分支的两端，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$给出的 ∂X 的局部坐标系属于不同类型的诱导定向.）

证明 (a) 首先，选取 Y 在 y 点邻近的正向局部坐标图卡(V,ψ)，要求满足条件 $\psi(y)=0$.

(b) 然后，我们选取有限个 X 的正向局部坐标图卡，使得相应的局部坐标域覆盖紧致集 $Z=F^{-1}(y)$，并且使得 F 的局部表示成为淹没的典范形式(从 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的投影).

(c) 考察流形 X 在点 $z\in Z$ 邻近的任意两个满足(b)中要求的正向局部坐标系$(u^0,u^1,\cdots,u^n)$和$(w^0,u^1,\cdots,u^n)$. 因为

$$\frac{\partial(w^0,u^1,\cdots,u^n)}{\partial(u^0,u^1,\cdots,u^n)}=\left|\begin{array}{c|ccc}\dfrac{\partial w^0}{\partial u^0} & & * & \\ \hline & 1 & & 0\\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1\end{array}\right|>0,$$

所以

$$\frac{\partial w^0}{\partial u^0} > 0.$$

可见，所选各坐标系的 φ^0 坐标给出 Z 的一个定向 C^r 图汇.

(d) Z 是紧致的 1 维微分流形. 它的每个连通分支微分同胚于[0,1]或者 S^1. 因而 $\partial Z = Z \cap \partial X$ 由偶数个点组成. 考察其中一个确定的[0,1]型连通分支. 我们可以选取 $t \in [0,1]$ 作为该分支的参数. 如果在参数 $t=0$ 处，依照(c)所述选取的 Z 的局部坐标的正向与参数 t 的增加方向一致，即 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} > 0$，那么沿整条参数曲线都有同样的情形. 不妨设在 $t=0$ 处有 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t} > 0$(相反的情形可类似地讨论). 则在参数曲线的"0"端点，由 $(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"内向型"诱导定向；而在参数曲线的"1"端点，由(另一图卡的)$(\varphi^1,\cdots,\varphi^n)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"外向型"诱导定向. □

注记 1.7 命题 1.6 将在下一节的讨论中起关键作用. 常遇到这样的情形：X 本身是紧致的. 对这样的情形，条件(4)自然而然地成立.

对以后的应用而言，以下两事项特别值得我们留意(符号与假设条件同命题 1.6).

(1) 在点 $p \in Z \cap \partial X$ 邻近，对于所选的坐标系 $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \cdots, \varphi^n)$，若记

$$\partial\varphi = (\varphi^1,\cdots,\varphi^n)\big|\partial X,$$

$$f = \partial F = F\big|\partial X, \quad \tilde{f} = \psi \circ f \circ (\partial\varphi)^{-1},$$

则有 $\tilde{f}(u^1,\cdots,u^n) = (u^1,\cdots,u^n)$. 因此，在 p 点计算 $\tilde{f}$ 的 Jacobi 行列式得到 $J(\tilde{f}) = 1$.

(2) 以后的讨论中，∂X 的正向当然具体给定. 在 $Z \cap \partial X$ 的

各点处，虽然 φ 是 X 的正向局部坐标，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向未必与 ∂X 的给定正向一致. 可以确认的事实是：在 $Z\cap\partial X$ 的各点处，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向是 $\varphi^0|Z$ 正向的"补定向". 因而，在 Z 的每一个$[0,1]$型连通分支的两端，由 $\partial\varphi$ 所确定的正向分别属于"内向型"诱导定向和"外向型"诱导定向.

注意到这些关键事实，在以后的讨论中，无论 ∂X 的正向怎样指定，我们都能参照具体情况，作出正确的判断.

§2 定向映射度与定向环绕数

记号约定 我们用记号 sgn 表示这样一个实函数：

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & 若\ x>0,\\ 0, & 若\ x=0,\\ -1, & 若\ x<0.\end{cases}$$

设 M 和 N 是定向微分流形，$\dim M=\dim N$，$p\in M$，$q\in N$. 设 f 是从 p 点邻近到 q 点邻近的局部微分同胚，φ 和 ψ 分别是 M 在 p 点邻近的和 N 在 q 点邻近的正向局部坐标系，则

$$\operatorname{sgn}\det(\mathrm{D}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}))_{\varphi(p)}$$

不因正向局部坐标系 φ 与 ψ 的不同选取而改变，因而可以无歧义地定义

$$\operatorname{Sgn} f_{*,p}:=\operatorname{sgn}\det(\mathrm{D}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}))_{\varphi(p)}.$$

定义 2.1 设 M 和 N 是定向光滑流形，$\dim M=\dim N$，M 紧致，$f\in C^\infty(M,N)$. 对于 f 的正则值 y，我们把

$$\sum_{p\in f^{-1}(y)}\operatorname{Sgn} f_{*,p} \tag{2.1}$$

叫做 f 对 y 的(定向)映射度，并把(2.1)记为 $\deg(f,y)$.

附注 根据"唱片引理"，对于 y 的某个开邻域中所有的 z 都有

$$f \pitchfork z, \quad \deg(f,z) = \deg(f,y).$$

因而 $\deg(f,y)$ 关于 $y \in N$ 是局部常值函数.

关于定向映射度性质的讨论，与模 2 映射度的相应讨论有很多相似之处. 但在这里，本章的命题 1.6 将起关键作用.

一般约定 在下面的讨论中，我们设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向的光滑流形，并且 $\dim M = \dim N$.

引理 2.2 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\partial X = M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向(或都是"内向型"的，或都是"外向型"的)，$F \in C^\infty(X,N)$，$f = \partial F = F|M$. 如果 y 是 F 与 ∂F 共同的正则值，那么

$$\deg(f,y) = 0.$$

证明 可参照第八章引理 1.2 证明中的讨论并引用本章命题 1.6 和注记 1.7 作出本引理的证明(参看图 26). □

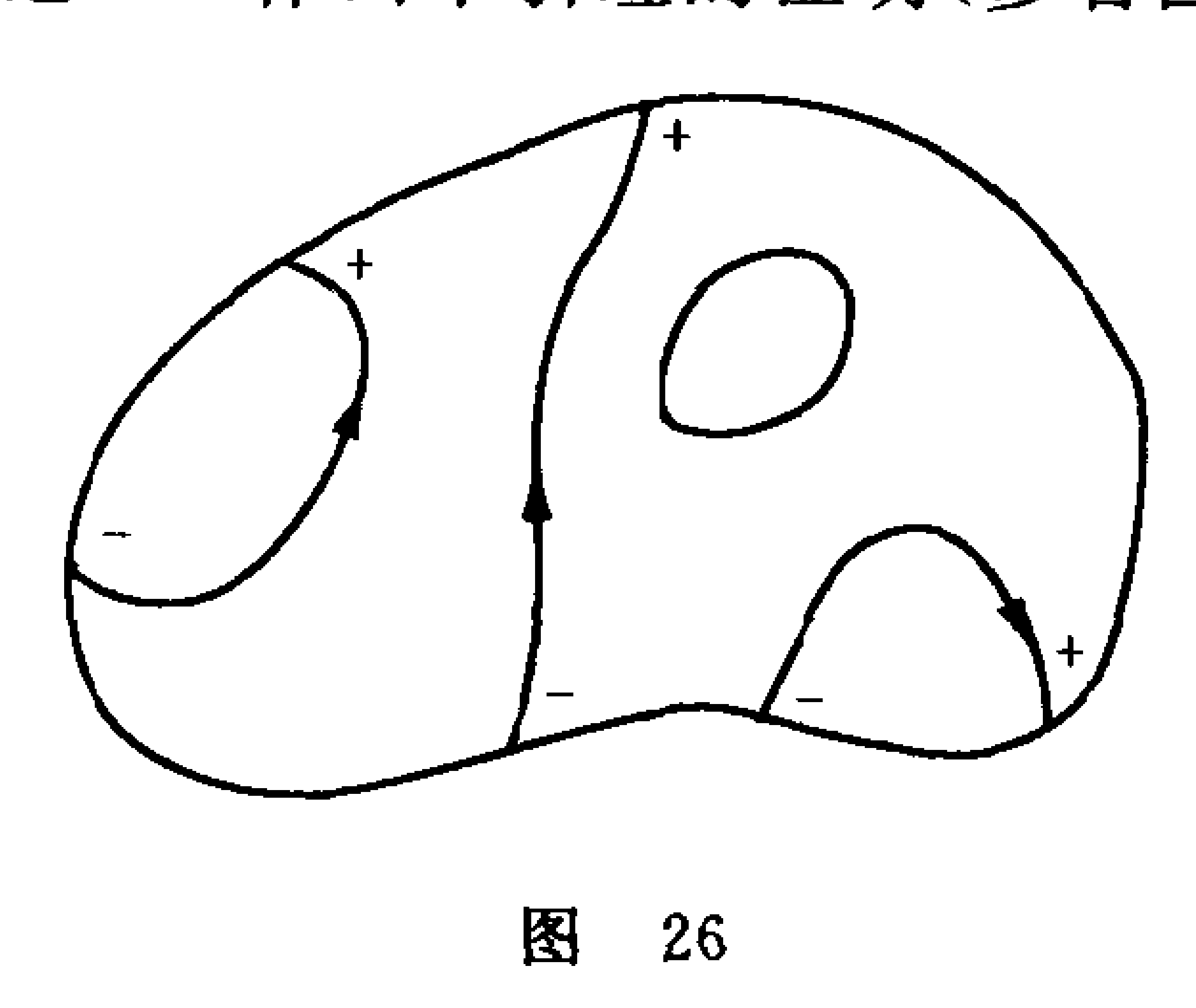


图 26

引理 2.3 设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向光滑流形，$\dim M = \dim N$，$y \in N$，$f_i \in C^\infty(M,N)$ $(i=0,1)$，并且

$$f_0 \pitchfork y, \quad f_1 \pitchfork y.$$

如果 $f_0 \sim f_1$(C^0 同伦)，那么

$$\deg(f_0,y) = \deg(f_1,y).$$

证明 f_0 必定光滑同伦于 f_1. 根据横截扩张定理，存在光滑映射 $F: I\times M\to N$，使得

(1) $F(i,x)=f_i(x)$, $\forall x\in M$, $i=0,1$;

(2) $F \pitchfork y$.

设 $J_0=[0,2/3)$, $J_1=(1/3,1]$, $\theta_0(t)=t$, $\theta_1(t)=t-1$. 则 $\{(J_0,\theta_0),(J_1,\theta_1)\}$ 是 $I=[0,1]$ 的定向 C^∞ 图汇，它赋予 I 确定的定向. 设 $\mathscr{A}$ 是给 M 定向的 C^∞ 图汇，我们记

$$\mathscr{D}=\{(J_i\times U,\theta_i\times\varphi)\,|\,(U,\varphi)\in\mathscr{A},\quad i=0,1\}.$$

则 $\mathscr{D}$ 赋予 $I\times M$ 确定的定向(乘积定向). $\mathscr{D}$ 中的图卡在 $0\times M$ 上诱导出“内向型”定向，在 $1\times M$ 上诱导出“外向型”定向. 对于 $i=0,1$，由 $j_i(p)=(i,p)$ 定义的映射 $j_i: M\to i\times M$ 是保持定向的 C^∞ 同胚. 若记 $F_i=F|(i\times M)(i=0,1)$，则有

(2.2) $$f_i=F_i\circ j_i,\quad i=0,1.$$

考察 $F^{-1}(y)$ 的这样一个连通分支：该连通分支微分同胚于[0,1]并且两个端点 $(0,p)$ 和 $(1,q)$ 分属于 $0\times M$ 和 $1\times M$. 利用本章的命题 1.6，考察 F_0 在 $(0,p)$ 点和 F_1 在 $(1,q)$ 点的“符号”，容易看到：

(2.3) $$\mathrm{Sgn}(F_0)_{*,(0,p)}=\mathrm{Sgn}(F_1)_{*,(1,q)}.$$

注意到 $j_i(i=0,1)$ 是保持定向的 C^∞ 同胚，由(2.2)和(2.3)又可得到

(2.4) $$\mathrm{Sgn}(f_0)_{*,p}=\mathrm{Sgn}(f_1)_{*,q}.$$

对 $F^{-1}(y)$ 的所有同胚于[0,1]并且两端分属于 $0\times M$ 和 $1\times M$ 的连通分支，将(2.4)这样的等式求和就得到

$$\deg(f_0,y)=\deg(f_1,y).$$

在上面的计算中，我们利用了这样的事实：如果 $F^{-1}(y)$ 的某个同胚于[0,1]的连通分支两端同属于 $0\times M$(或者同属于$1\times M$)，那

么这两个端点对 $\deg(f_0,y)$ 和 $\deg(f_1,y)$ 的贡献都是 0. □

说明 2.4 设 M 是定向的紧致带边光滑流形，N 是定向的无边光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f: M\to N$ 是光滑映射. 如果 $y\in N\backslash f(\partial M)$ 是 f 的正则值，那么原像集 $f^{-1}(y)$ 是包含在 $M\backslash\partial M$ 中的紧致 0 维流形. “唱片引理”的全部结论适用于这一情形，因而仍可定义

$$\deg(f,y):=\sum_{p\in f^{-1}(y)}\operatorname{Sgn}f_{*,p}.$$

在以后的某些讨论中，我们将会利用这一说明.

定义 2.5 设 M 和 N 是定向的光滑流形(不带边)，M 紧致，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$，$y\in N$. 并设 $f_1\in C^\infty(M,N)$ 满足这样的条件

$$f_1\sim f,\quad f_1 \pitchfork y.$$

我们定义

$$\deg(f,y):=\deg(f_1,y).$$

命题 2.6 定义 2.5 确当无歧义，并且所定义的 $\deg(f,y)$ 关于 f 是同伦不变的.

命题 2.7 设 M 和 N 是定向的光滑流形，M 紧致，N 连通，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$. 则 $\deg(f,y)$ 不随 $y\in N$ 而改变. 即对所有的 $y\in N$，$\deg(f,y)$ 取相同的值.

定义 2.8 设 M 是定向的紧致光滑流形，N 是定向的光滑流形，$\dim M=\dim N$，$f\in C^0(M,N)$. 如果 $\deg(f,y)$ 不随 $y\in N$ 而改变(例如 N 是连通流形的情形)，那么我们就把

$$\deg(f):=\deg(f,y)$$

叫做 f 的映射度.

命题 2.9 在定义 2.8 所述的条件下，如果 $\deg(f)\neq 0$，那么 $f: M\to N$ 必定是满映射.

命题 2.10 设 M，N 和 P 是定向的光滑流形，M 和 N 紧

致，N 和 P 连通，并且 $\dim M=\dim N=\dim P$.

(1) 如果 $\varphi\in C^0(M,N)$，$\psi\in C^0(N,P)$，那么

$$\deg(\psi\circ\varphi)=\deg(\psi)\cdot\deg(\varphi).$$

(2) 如果 $\mathrm{id}: M\to M$ 是恒同映射，那么

$$\deg(\mathrm{id})=1.$$

(3) 如果 $\varphi: M\to N$ 是同胚映射，ψ 是其逆映射，那么

$$\deg(\varphi)=\deg(\psi)=\pm 1.$$

定义 2.11 在命题 2.10 的(3)中，如果 $\deg(\varphi)=1$，那么我们就称 φ 为保持定向的同胚. 否则，我们就称 φ 为反转定向的同胚.

定向情形环绕数的定义可仿照模 2 情形写出，以下只作提要式的陈述.

定义 2.12 设 M 是定向的紧致无边光滑流形，$\dim M=n$，$f\in C^0(M,\boldsymbol{R}^{n+1})$，并且设 $z\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash f(M)$. 则可定义连续映射

$$\begin{cases}\theta: M\to S^n,\\ \quad x\mapsto\dfrac{f(x)-z}{\|f(x)-z\|}.\end{cases}$$

映射 f 对点 z 的环绕数定义为

$$W(f,z):=\deg(\theta).$$

我们约定：S^n 赋有“外法线”诱导定向.

引理 2.13 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\dim X=n+1$. 并设 $\partial X=M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向(或都是“内向型”的，或都是“外向型”的). 如果

$$F\in C^0(X,\boldsymbol{R}^{n+1}),\quad f=\partial F=F\big|M,$$

那么对任何 $z\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash F(X)$ 都有 $W(f,z)=0$.

引理 2.14 设 M 是定向的紧致光滑无边流形，$\dim M=n$，$f_0,f_1\in C^0(M,\boldsymbol{R}^{n+1})$. 如果存在 C^0 同伦 $H: f_0\sim f_1$，那么对于任何 $z\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash H(I\times M)$ 都有 $W(f_0,z)=W(f_1,z)$.

引理 2.15 设 $A: \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是非退化线性映射，则有

$$W(A|S_\rho, 0) = \operatorname{sgn}(\det A),$$

这里

$$S_\rho = S_\rho^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1} \mid \|x\| = \rho\},$$

并且 S_ρ 赋有“外向型”诱导定向.

证明 设 $\beta \neq 0$，对于初等方阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \beta & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} (i),$$

我们将其主对角线上第 i 行的 β 换成

$$(1-s)\beta + s\frac{\beta}{|\beta|},$$

这样得到含参数 s 的方阵 $B(s)$. 对于另一类型的初等方阵

$$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & \gamma & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

我们将其第 i 行第 j 列的 γ 换成 $(1-s)\gamma$，这样得到含参数 s 的方阵 $C(s)$.

将引理中所述的非退化线性变换 A 视为 $(n+1)\times(n+1)$ 方阵. 非退化方阵 A 可以经过初等变换化成恒同方阵，因而 A 可以表示成初等方阵的乘积：

$$A = A_1 A_2 \cdots A_l.$$

对每个初等方阵 $A_k(1 \leqslant k \leqslant l)$，视其类型分别按上面所述的办法引入含参数的方阵 $A_k(s)$，然后记

$$A(s) = A_1(s) A_2(s) \cdots A_l(s).$$

对每个 $s \in [0,1]$，显然都有 $\det A(s) \neq 0$. 我们还注意到：$A(0) = A$，而 $A(1)$ 是一个对角形方阵，其主对角线上的数都是 $+1$ 或者 -1，并且 $\det A(1) = \operatorname{sgn} \det A$.

再来考察非退化的含参数方阵

$$\begin{bmatrix} -\cos \pi s & -\sin \pi s \\ \sin \pi s & -\cos \pi s \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

让 s 从 0 变到 1，该参数方阵经历以下变化

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

回到我们上面的讨论. 对于 $\det A > 0$ 的情形，可以通过(2.5)类型的参数过程，将 $A(1)$ 变化成单位方阵. 对于 $\det A < 0$ 的情形，可以通过(2.5)类型的参数过程，将 $A(1)$ 变成这样一个对角形方阵. 其主对角线上仅有单个 -1，其余的都是 $+1$. 为引述方便，称这样的对角形方阵为“拟单位方阵”.

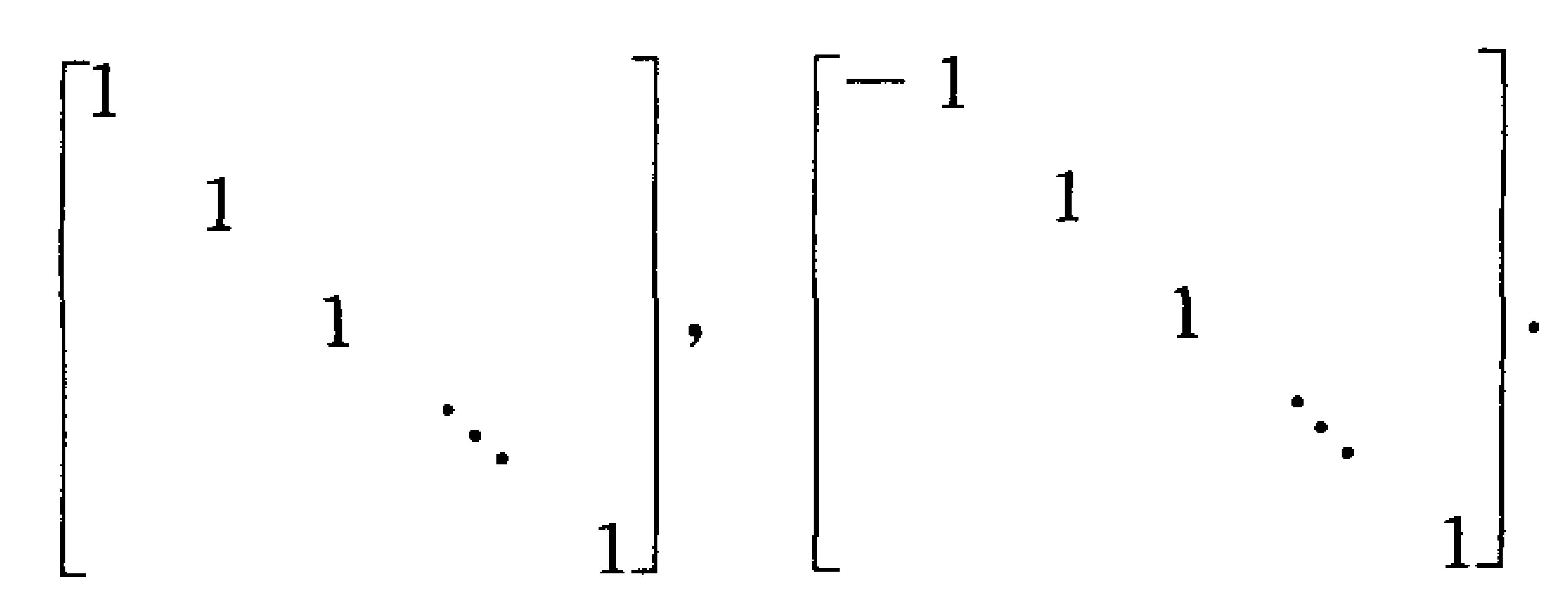
综上所述，存在同伦 H 将 A 变化成单位方阵或拟单位方阵那样的变换(视 $\det A$ 的符号而定)；并且在同伦过程中的每一时刻 t，对应于该时刻的 $H(t, \cdot)$ 都是非退化的线性变换，因而

$$H(I \times S_\rho^n) \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

根据引理 2.14，我们得到结论：

$$W(A|S_\rho, 0) = \operatorname{sgn}(\det A). \qquad \square$$

注记 在引理 2.15 的讨论中，实际上已经证明了 $\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$ 恰有两个连通分支，分别含有以下两个标准 k 阶方阵之一：



$$\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}-1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}.$$

引理 2.16 设U和V是$\boldsymbol{R}^{n+1}$中的开集,$F:U\to V$是保持定向的微分同胚(反转定向的微分同胚),$0\in U$,$0\in V$,$F(0)=0$.则对足够小的正数ε,必有

$$W(F|S_\varepsilon,0)=1,$$

$$(W(F|S_\varepsilon,0)=-1),$$

这里

$$S_\varepsilon=S_\varepsilon^n=\{x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid\|x\|=\varepsilon\},$$

并且$S_\varepsilon^n=\partial D_\varepsilon^{n+1}$赋有"外向型"诱导定向.

证明 记$A=\mathrm{D}F(0)$,则A是非退化线性映射.因而

$$\inf\{\|A\xi\|\mid\xi\in\boldsymbol{R}^{n+1},\ \|\xi\|=1\}=\sigma>0.$$

于是

$$\|Ax\|\geqslant\sigma\|x\|,\quad\forall x\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

取足够小的$\varepsilon>0$,使得只要$0<\|x\|<\varepsilon$,就有

$$\|F(x)-Ax\|<\sigma\|x\|;$$

因而,对于$x\in S_\varepsilon$和$t\in[0,1]$就有

$$Ax+t(F(x)-Ax)\neq0.$$

于是,对$x\in S_\varepsilon$和$t\in[0,1]$可定义

$$H(t,x)=\frac{Ax+t(F(x)-Ax)}{\|Ax+t(F(x)-Ax)\|}.$$

我们看到,以下两个映射$S_\varepsilon^n\to S_1^n$的映射度应该相等:

$$H(0,x)=\frac{Ax}{\|Ax\|}\text{ 与 }H(1,x)=\frac{F(x)}{\|F(x)\|}.$$

因而

$$W(F|S_\varepsilon,0)=W(A|S_\varepsilon,0)$$
$$=\text{sgn}(\det A).\qquad\square$$

定理 2.17 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\dim X=n+1$，∂X 赋有"外向型"诱导定向，$F\in C^\infty(X,\boldsymbol{R}^{n+1})$，$\partial F=F|\partial X$. 于是，对 $z\in\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash F(\partial X)$ 必有

$$W(\partial F,z)=\deg(F,z).$$

证明 因为 $\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash f(\partial X)$ 是开集，故 z 所属 $\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash f(\partial X)$ 的连通分支 G 也是开集. 对限制于开集 $f^{-1}(G)\subset X\backslash\partial X$ 的 f 引用 Sard 定理可知：存在 f 的正则值 $v\in G$. 对此情形，$f^{-1}(v)\subset X\backslash\partial X\subset X$，"唱片引理"的结论仍然成立. 不妨设 $v=0$. 于是存在 0 点的开邻域 V，使得

$$F^{-1}(V)=U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_k,$$

这里 $U_1,\cdots,U_k$ 是不相交的开集，并且

$$F|U_i:U_i\to V$$

是 C^∞ 同胚. 设

$$F^{-1}(0)=\{p_1,\cdots,p_k\},$$

其中

$$p_i\in U_i,\quad i=1,\cdots,k.$$

约定用记号"≈"表示"光滑同胚于". 取围绕 p_i 点的足够小的闭邻域

$$D_i\subset U_i,\quad D_i\approx D_\varepsilon^{n+1},$$

其边缘
$$C_i=\partial D_i\approx S_\varepsilon^n.$$

这里的 $\varepsilon>0$ 足够小，于是根据引理 2.16 可知：

$$W(F|C_i,0)=\text{Sgn}\,F_{*,p_i},\quad i=1,\cdots,k.$$

考察带边流形

$$Y = X \Big\backslash \left(\bigcup_{i=1}^{k} \operatorname{int} D_i \right).$$

这流形的边缘

$$\partial Y = \partial X \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \partial D_i \right)$$

赋有关于 Y 为"外向型"的诱导定向. 因为

$$F(Y) \subset \boldsymbol{R}^{n+1} \backslash \{0\},$$

所以，根据引理 2.13 应该有

$$W(F|\partial Y, 0) = 0,$$

也就是

$$W(F|\partial X, 0) + \sum_{i=1}^{k} W(F|(-\partial D_i), 0) = 0.$$

这里 $-\partial D_i$ 表示 $C_i = \partial D_i$ 赋有关于 D_i 为"内向型"的定向. 于是

$$\begin{aligned} W(F|\partial X, 0) &= -\sum_{i=1}^{k} W(F|(-\partial D_i), 0) \\ &= \sum_{i=1}^{k} W(F|\partial D_i, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{k} W(F|C_i, 0) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Sgn} F_{*, p_i} \\ &= \deg(F, 0). \end{aligned}$$

这样，我们证明了

$$\dot{W}(\partial F, z) = \deg(F, z). \qquad \square$$

上面定理的结论可推广于 C^0 映射情形：

定理 2.18 设 X 是定向的紧致光滑带边流形，$\dim X = n+1$，$F \in C^0(X, \boldsymbol{R}^{n+1})$. 设 ∂X 赋有"外向型"诱导定向，则对于

$z\in \boldsymbol{R}^{n+1}\setminus F(\partial X)$，必有

$$W(\partial F,z)=\deg(F,z).$$

证明 设 z 到 $F(\partial X)$的距离

$$\operatorname{dist}(z,F(\partial X))\geqslant 2\delta>0.$$

根据带边流形的映射光滑化定理，存在 $\widetilde{F}\in C^{\infty}(X,\boldsymbol{R}^{n+1})$，使得

$$\|\widetilde{F}(x)-F(x)\|<\delta,\quad \forall x\in X.$$

约定记

$$H(t,x)=F(x)+t(\widetilde{F}(x)-F(x)),$$

则 H 满足以下这些条件：

(1) $H(0,x)=F(x),\quad \forall x\in X,$

$H(1,x)=\widetilde{F}(x),\quad \forall x\in X;$

(2) $\|H(t,x)-F(x)\|<\delta,\quad \forall t\in I,\ x\in X.$

由(2)可知

$$H(I\times \partial X)\subset \boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{z\}.$$

因而
$$\begin{aligned}W(\partial F,z)&=W(\partial\widetilde{F},z)\\&=\deg(\widetilde{F},z)=\deg(F,z).\end{aligned}$$ □

§3 Hopf 定 理

Hopf 指出：映射度完全决定了球面映射的同伦类. 他证明了这样一个定理：如果两个连续映射 $f_0,f_1:S^n\to S^n$ 具有相同的映射度，即 $\deg(f_0)=\deg(f_1)$，那么这两个映射同伦：$f_0\sim f_1$.

在本节中，我们将证明推广的 Hopf 定理：设 M 是紧致、连通、可定向的 n 维光滑流形，$f_i\in C^0(M,S^n)\ (i=0,1)$. 如果 $\deg(f_0)=\deg(f_1)$，那么映射 f_0 与映射 f_1 同伦.

为了证明这个推广的 Hopf 定理，我们从更特殊的情形开

始，首先去证明：如果 $f\in C^0(S^n,S^n)$ 并且 $\deg(f)=0$，那么 f 同伦于常值映射.

引理 3.1 设 X 是拓扑空间. 如果连续映射 $f,g:X\to S^n$ 满足条件

$$\|f(x)-g(x)\|<2,\quad \forall x\in X,$$

那么 f 与 g 同伦.

证明 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是对径点，联结这两点的线段不经过原点，所以可定义

$$H(t,x)=\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|},\quad \forall (t,x)\in[0,1]\times X.$$

显然 H 使 f 同伦于 g. □

引理 3.2 设 K 是 S^n 的紧致子集，$a\in S^n\backslash K$. 并设 V 是以 $-a$ 为"极点"的这样一个"极圈"式邻域：

$$V:=\{x\in S^n\,|\,\|x-(-a)\|<1\}.$$

则存在光滑同胚 $h:S^n\to S^n$，满足条件：

(1) $h(a)=a$, $h(-a)=-a$;

(2) $h(K)\subset V$;

(3) $h\sim \mathrm{id}$;

(4) $h^{-1}\sim \mathrm{id}$.

证明 设 Π 是垂直平分 a 与 $-a$ 联线的超平面. 从 a 点出发向超平面 Π 作球极投影 ρ，则 $\rho(-a)=0$. 因为 $\rho(K)=\widetilde{K}$ 是 Π 的紧致子集，并且 $\rho(V)=\widetilde{V}$ 是超平面 Π 上以 0 为中心的开圆盘(即开球体)，所以存在 $\lambda\in(0,1]$，使得 $\lambda\widetilde{K}\subset\widetilde{V}$. 我们定义

$$h(x)=\begin{cases}\rho^{-1}(\lambda\rho(x)), & \text{若 } x\neq a,\\ a, & \text{若 } x=a;\end{cases}$$

$$H(t,x)=\begin{cases}\rho^{-1}((t+(1-t)\lambda)\rho(x)), & \text{若 } x\neq a,\\ a, & \text{若 } x=a.\end{cases}$$

则显然 $h:S^n\to S^n$ 是光滑同胚，并且容易验证

(1) $h(a)=a$, $h(-a)=-a$;

(2) $h(K)\subset V$;

(3) $H : h\sim \mathrm{id}$.

结论(4)是结论(3)的直接推论. 如果记

$$G(t,x) = H(1-t,h^{-1}(x)),$$

那么就有

$$G(0,x)= H(1,h^{-1}(x)) = h^{-1}(x),$$

$$G(1,x)= H(0,h^{-1}(x)) = h(h^{-1}(x)) = x.$$

由此得知

(4) $G : h^{-1}\sim \mathrm{id}$. □

记号约定 在下面引理 3.3 和引理 3.4 的讨论中,认为圆周 S^1 上已指定了正方向. 约定以 $[p,q]$ 表示 S^1 上沿正方向从 p 点到 q 点的一段闭弧,并约定以 (p,q) 表示相应的一段开弧.

引理 3.3 设 $[p,q]$ 是圆周 S^1 上沿指定正方向从 p 点到 q 点的一段闭弧. 如果 $\varphi\in C^0(S^1,S^1)$ 满足条件

(1) $\varphi(p)=\varphi(q)=a$;

(2) $\varphi([p,q])\neq S^1$,

那么 φ 同伦于这样一个连续映射 ψ:

$$\psi(x) = \begin{cases} a, & \forall x\in[p,q], \\ \varphi(x), & \forall x\in S^1\backslash(p,q). \end{cases}$$

证明 取 $z\in S^1\backslash\varphi([p,q])$,并设

$$h : S^1\backslash\{z\} \to \boldsymbol{R}$$

是以 z 为极点的 1 维球极映射. 对于 $t\in I$, $x\in[p,q]$,我们定义

$$H(t,x) = h^{-1}((1-t)h(\varphi(x)) + th(a));$$

而对于 $t\in I$, $x\in S^1\backslash(p,q)$,则定义

$$H(t,x) = \varphi(x).$$

显然 $H : I\times S^1\to S^1$ 是连续映射,并且 H 使 φ 同伦于 ψ. □

引理 3.4 如果 $f\in C^0(S^1,S^1)$ 的映射度等于 0，那么 f 同伦于常值映射.

证明 (必要时以同伦于 f 的光滑映射 f_0 代替 f) 不妨设 $f\in C^\infty(S^1,S^1)$. 设 $b\in S^1$ 是 f 的一个正则值. 因为

$$\deg(f,b)=0,$$

所以 $f^{-1}(b)$ 含有偶数个点 (设为 $2k$ 个)，其中 k 个为"正型"点 (f_* 在这些点处的"符号"是正的)，另外 k 个为"负型"点 (f_* 在这些点处的"符号"是负的). 必有相邻的异型点. 不妨设 p_0, $q_0\in f^{-1}(b)$，p_0 是正型点，q_0 是负型点，并且 (p_0,q_0) 中不含有 $f^{-1}(b)$ 的点.

根据"唱片引理"知，存在包含 b 点的开弧 (b_-,b_+)，使得 $f^{-1}((b_-,b_+))$ 是 $2k$ 段两两不相交的开弧的并集，f 限制在每一段开弧上是到 (b_-,b_+) 的 C^∞ 同胚. 我们设 (p_-,p_+) 和 (q_-,q_+) 分别是含 p_0 和 q_0 的上述开弧. 因为 f 在 p_0 点邻近是顺向局部 C^∞ 同胚，在 q_0 点邻近是逆向局部 C^∞ 同胚，所以 (参看图 27)

$$f([p_0,p_+))=f((q_-,q_0])=[b,b_+).$$

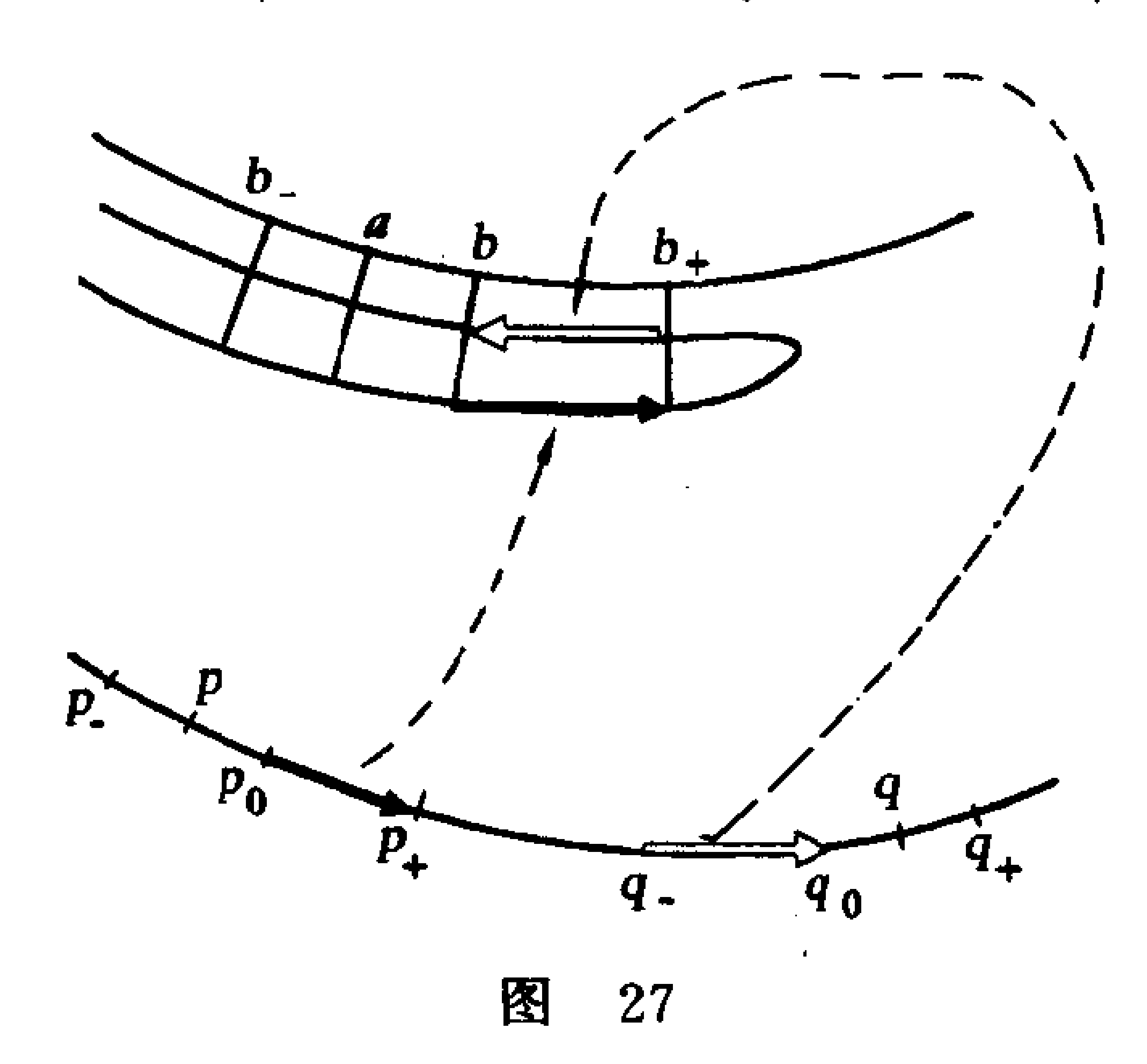


图 27

取 $a \in (b_-, b)$，并设 $p \in (p_-, p_0)$ 和 $q \in (q_0, q_+)$ 使得 $f(p)=f(q)=a$，则有

$$(b_-, a) \cap f([p,q]) = \varnothing.$$

根据引理 3.3，f 同伦于这样一个映射 f_1：

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \forall x \in [p,q], \\ f(x), & \forall x \in S^1 \setminus (p,q). \end{cases}$$

易见

$$(a, b_+) \cap f_1([p,q]) = \varnothing.$$

取 $b'_- = a, b'_+ = b_+$. 则 (b'_-, b'_+) 是含 b 的开弧. 原像集 $f_1^{-1}((b'_-, b'_+))$ 是 $2k-2$ 段两两不相交的开弧的并集，f_1 限制在每一段开弧上是到 (b'_-, b'_+) 的 C^∞ 同胚. 于是可继续施行类似于上面所述的操作. 总共经过 k 次操作之后，可使

$$f \sim f_1 \sim \cdots \sim f_k,$$

其中的 f_k 不取 b 值. 根据引理 3.1，可以断定 f_k 同伦于常值映射 $c(x) \equiv -b$. 综上所述，我们证明了：f 同伦于常值映射 c. □

我们将对任意维的球面 S^n，证明类似于引理 3.4 的结论. 为此，先作一些准备.

引理 3.5 设 Y 是拓扑空间，$S^n = \partial D^{n+1}$，$g \in C^0(S^n, Y)$. 为使 g 同伦于常值映射，必须而且只须：g 可扩充为连续映射 $G: D^{n+1} \to Y$.

证明 先证必要性. 设

$$H \in C^0(I \times S^n, Y),$$

使得

$$H(0,x) = g(x), \quad \forall x \in S^n,$$
$$H(1,x) = c, \quad \forall x \in S^n.$$

取 $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$，我们定义

$$F(t,x)=\begin{cases}H\left(\dfrac{t}{1-\delta},x\right), & \forall t\in[0,1-\delta],\\ c, & \forall t\in[1-\delta,1];\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases}F\left(1-\|x\|,\dfrac{x}{\|x\|}\right), & 对于\ 1\geqslant\|x\|\geqslant\delta,\\ c, & 对于\ \|x\|\leqslant\delta.\end{cases}$$

显然 $G\in C^0(D^{n+1},Y)$符合这样的要求：

$$G\big|\partial D^{n+1}=g.$$

下面证明所述条件的充分性. 如果

$$G\in C^0(D^{n+1},Y)$$

使得

$$G\big|\partial D^{n+1}=g,$$

我们定义

$$H(t,x)=G((1-t)x),\quad \forall(t,x)\in I\times\partial D^{n+1},$$

那么 H 就使 g 同伦于常值映射：

$$C(x)=G(0),\quad \forall x\in\partial D^{n+1}.\qquad \square$$

引理 3.6 以下三条陈述相互等价：

$(\mathrm{HO})_n$ 若 $f\in C^0(S^n,S^n)$的映射度等于 0，则 f 同伦于常值映射；

$(\mathrm{HO})_n'$ 若 $g\in C^0(S^n,\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\})$对 0 点的环绕数等于 0，则 g 同伦于常值映射.

$(\mathrm{HO})_n''$ 若 $g\in C^0(S^n,\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\})$对 0 点的环绕数等于 0，则 g 可以扩充为连续映射 $G: D^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$.

证明 将按以下程序进行：

$$(\mathrm{HO})_n\overset{(1)}{\Longrightarrow}(\mathrm{HO})_n'\overset{(2)}{\Longrightarrow}(\mathrm{HO})_n''\overset{(3)}{\Longrightarrow}(\mathrm{HO})_n.$$

(1) 设连续映射 $g: S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\}$使得 $W(g,0)=0$. 则连续映射

$$f(x)=\frac{g(x)}{\|g(x)\|}:S^n\to S^n$$

使得 $\deg(f)=0$. 根据$(\mathrm{HO})_n$, f 同伦于常值映射 c. 因为 $g(x)$ 与 $f(x)$的联线不通过原点：

$$(1-t)g(x)+tf(x)\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\},\quad \forall x\in S^n,$$

所以 g 与 f 同伦. 于是 $g\sim f\sim c$.

(2) 设连续映射 $g:S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$对 0 点的环绕数等于 0. 则根据$(\mathrm{HO})'_n$, g 同伦于常值映射. 于是，根据引理 3.5, g 可以扩充为连续映射

$$G:D^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}.$$

(3) 考察映射度为 0 的连续映射 $f:S^n\to S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. 将 f 视为从 S^n 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$的映射，则有

$$W(f,0)=\deg(f)=0.$$

根据$(\mathrm{HO})''_n$, 存在连续映射 $F:D^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$, 使得 $F|S^n=f$. 对于 $t\in I$, $x\in S^n$, 我们定义

$$H(t,x)=\frac{F((1-t)x)}{\|F((1-t)x)\|}.$$

显然 $H\in C^0(I\times S^n,S^n)$, 并且 H 将 f 同伦于常值映射：

$$H(0,x)=f(x),\quad \forall x\in S^n,$$

$$H(1,x)=\frac{F(0)}{\|F(0)\|},\quad \forall x\in S^n. \qquad \square$$

约定 设 X 和 Y 是光滑流形，

$$\xi\in X,\quad \eta\in Y.$$

如果存在光滑同胚 $\varphi:X\to Y$, 使得 $\varphi(\xi)=\eta$, 那么就称(X,ξ)光滑同胚于(Y,η).

引理 3.7 设 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}, 设(Ω,b)光滑同胚于$(\boldsymbol{R}^{n+1},0)$, $f\in C^\infty(\Delta,\Omega)$, $b\in\Omega\setminus f(\partial\Delta)$是 f 的正则值，并且

$$\deg(f,b)=0.$$

假如$(\mathrm{HO})''_n$成立，则存在$F\in C^0(\Delta,\Omega\backslash b)$，使得

$$F\big|\partial\Delta = f\big|\partial\Delta.$$

这就是说，在所述的条件下，可以在Δ的内部修改f，使得避开值b.

证明 不妨设Δ就是D^{n+1}，(Ω,b)就是$(\boldsymbol{R}^{n+1},0)$. 光滑映射$f: D^{n+1}\to\boldsymbol{R}^{n+1}$对点$b=0$的映射度等于0，因而

$$W(\partial f,0) = 0.$$

根据$(\mathrm{HO})''_n$，存在$F\in C^0(D^{n+1},\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash\{0\})$，使得

$$F\big|\partial\Delta = f\big|\partial\Delta. \qquad \square$$

定理 3.8(Hopf定理的特殊情形) 如果$f\in C^0(S^n,S^n)$的映射度等于0，那么f同伦于常值映射.

证明 (对n归纳)根据引理3.4，论断$(\mathrm{HO})_1$成立. 假设$(\mathrm{HO})_n$成立(因而$(\mathrm{HO})'_n$和$(\mathrm{HO})''_n$也成立)，我们来证明$(\mathrm{HO})_{n+1}$也成立，即：如果$f\in C^0(S^{n+1},S^{n+1})$的映射度等于0，那么$f$同伦于常值映射. 设$\alpha,\beta: S^{n+1}\to S^{n+1}$是同伦于id的光滑同胚. 若将$f$代之以$\beta\circ f\circ\alpha$，则既不改变它所属的同伦类，也不改变映射度：

$$\beta\circ f\circ\alpha\sim f,\quad \deg(\beta\circ f\circ\alpha) = \deg(f).$$

我们在下面的讨论中，将充分利用这一事实.

不妨设$f: S^{n+1}\to S^{n+1}$是光滑映射. 我们选取f和$-f$共同的正则值a. 于是，a和$b=-a$都是f的正则值. 适当选择同伦于id的光滑同胚$\alpha,\beta: S^{n+1}\to S^{n+1}$，并且以

$$\beta\circ f\circ\alpha$$

代替f，可以认为：

(1) $f^{-1}(a)\subset U=\{x\in S^{n+1}\big|\,\|x-a\|<1\}$，

$f^{-1}(b)\subset V=\{x\in S^{n+1}\big|\,\|x-b\|<1\}$；

(2) $f(\overline{V})\subset V$(根据引理3.2).

我们记 $\Delta=\overline{V}$, $\Omega=V$. 则 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}, (Ω,b) 光滑同胚于 $(\mathbf{R}^{n+1},0)$, 且

$$\deg(f|\Delta,b)=0.$$

根据引理 3.7, 存在 $F\in C^0(\Delta,\Omega\backslash b)$, 使得

$$F|\partial\Delta=f|\partial\Delta.$$

于是, 可以定义这样一个(不取 b 值的)映射:

$$g(x)=\begin{cases}F(x), & \forall x\in\overline{V},\\ f(x), & \forall x\in S^{n+1}\backslash V.\end{cases}$$

显然 $g\in C^0(S^{n+1},S^{n+1})$. 因为

$$\|f(x)-g(x)\|<2,\quad \forall x\in S^{n+1},$$

所以(根据引理 3.1) f 同伦于 g:

$$f\sim g.$$

又因为 $b\notin g(S^{n+1})$, 所以 g 同伦于常值映射 $c(x)\equiv -b$. 综上所述, 我们已经证明了: f 同伦于常值映射. □

推论 3.9 设 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}, (Ω,b) 光滑同胚于 $(\mathbf{R}^{n+1},0)$, $f\in C^\infty(\Delta,\Omega)$. 设 $b\in\Omega\backslash f(\partial\Delta)$ 是 f 的正则值, 并且

$$\deg(f,b)=0,$$

则存在 $F\in C^0(\Delta,\Omega\backslash b)$, 使得

$$F|\partial\Delta=f|\partial\Delta.$$

换言之, 可以在 Δ 内部修改 f, 使之避开值 b.

证明 定理 3.8 已经得到证明. 原来引理 3.7 所要求的条件 $(\mathrm{HO})_n''$ 肯定成立. 因而本推论成立. □

定理 3.10(Hopf 定理, 一般情形) 设 M 是一个定向的紧致连通光滑流形, $\dim M=n$. 如果 $f_0,f_1\in C^0(M,S^n)$ 的映射度相等:

$$\deg(f_0)=\deg(f_1),$$

那么 f_0 同伦于 f_1.

证明 不妨设 f_0 和 f_1 是光滑映射. 记 $X=[0,1]\times M$,则 X 为带边流形. 我们约定赋予 $\partial X=(0\times M)\cup(1\times M)$"外向型"定向.

取 $\eta\in C^\infty(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$满足这样的条件:

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,1/9]\cup[8/9,1],\\ 0, & t\in[2/9,7/9].\end{cases}$$

然后定义一个从 X 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的映射

$$E(t,x)=\begin{cases}\eta(t)f_0(x), & (t,x)\in[0,1/3]\times M,\\ 0, & (t,x)\in[1/3,2/3]\times M,\\ \eta(t)f_1(x), & (t,x)\in[2/3,1]\times M.\end{cases}$$

显然 $E: X\to\boldsymbol{R}^{n+1}$是光滑映射. 记 $K=K_0\cup K_1$,其中

$$K_0=[0,1/9]\times M,\quad K_1=[8/9,1]\times M.$$

因为 $E(K)\subset S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$,所以 $E\pitchfork_K 0$. 根据横截扩张定理,存在光滑映射

$$F: X\to\boldsymbol{R}^{n+1},$$

使得

$$F\pitchfork 0,\quad F|K=E|K.$$

适当选择同伦于 id 的光滑同胚 $\alpha: X\to X$(要求 $\alpha(x)=x$, $\forall\, x\in K$),并以 $F\circ\alpha$ 代替 F,可以认为 F 满足这样的条件:

$$F^{-1}(0)\subset\mathrm{int}\Delta,$$

这里 $\Delta\subset(1/3,2/3)\times M$ 并且 Δ 光滑同胚于 D^{n+1}. 容易看到:

$$\begin{aligned}\deg(F|\Delta,0)&=\deg(F,0)=W(F|\partial X,0)\\&=\deg(f_1)-\deg(f_0)=0.\end{aligned}$$

根据推论 3.9,存在连续映射 $G: \Delta\to\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus\{0\}$,使得

$$G|\partial\Delta=F|\partial\Delta.$$

我们记

$$h(t,x)=\begin{cases}F(t,x), & (t,x)\in(I\times M)\setminus\Delta,\\ G(t,x), & (t,x)\in\Delta;\end{cases}$$

$$H(t,x)=\frac{h(t,x)}{\|h(t,x)\|}.$$

显然 $H\in C^0(I\times M,S^n)$是从 f_0 到 f_1 的同伦. □

练　习　I

I. 1. 设 $p(z)$是一个复系数多项式，则 p 决定了一个从复数球面 $\widetilde{C}\approx S^2$ 到 $\widetilde{C}\approx S^2$ 的映射. 试计算这映射 p 的映射度.

I. 2. 映射 $\alpha: S^n\to S^n$ 定义为：$\alpha(x)=-x$, $\forall x\in S^n$. 试计算 α 的映射度.

I. 3. 设 $f\in C^0(S^n,S^n)$，则有

(1) 如果 $\deg(f)\neq 1$，那么存在 $x_0\in S^n$，使得 $f(x_0)=-x_0$；

(2) 如果 $\deg(f)\neq(-1)^{n+1}$，那么存在 $x_0\in S^n$，使得 $f(x_0)=x_0$.

I. 4. 设 $f,g\in C^0(S^{2n},S^{2n})$，考察这样三个映射：$f$，$g$ 和 $g\circ f$. 试证其中某个映射必具有不动点.

I. 5. 设 $f\in C^0(S^{2n},S^{2n})$. 则或者 f 具有不动点，或者存在 $x_0,y_0\in S^{2n}$，使得 $f(x_0)=y_0$, $f(y_0)=x_0$.

I. 6. 设 $f,g\in C^0(S^n,S^n)$，试证 $g\circ f$ 同伦于 $f\circ g$.

I. 7. S^n 具有处处不为 0 的切向量场的充分必要条件是：n 为奇数.

I. 8. 设 $F\in C^0(\boldsymbol{R}^{2n+1},\boldsymbol{R}^{2n+1})$. 试证存在 $x\in\boldsymbol{R}^{2n+1}\setminus\{0\}$ 和 $\lambda\in\boldsymbol{R}$，使得

$$F(x)=\lambda x.$$

第十章　局部映射度，Leray 乘积公式与 Jordan-Brouwer 分离定理

§1　映射度定义的局部化

在许多问题里，常常需要了解：有多少 $x \in \Omega$ 能使得 $f(x) = y$？（这里 Ω 是流形上的一个开集.）至少希望能估计

$$\#(\Omega \cap f^{-1}(y))$$

的下界. 为此目的，我们来考察局部映射度 $\deg(f,\Omega,y)$（常常简单地记为 $d(f,\Omega,y)$）.

基本约定 1.1　在本节中，设 M 和 N 是定向的光滑流形（不带边），$\dim M = \dim N = n$；并设 Ω 是 M 的开子集，其闭包 $\overline{\Omega}$ 是紧致的. 我们还约定记

$$\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega.$$

定义 1.2　对于 $f \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N)$ 和 $y \in N$，如果

$$f(\partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}, \quad f \pitchfork_\Omega y,$$

那么
$$f^{-1}(y) \cap \Omega = f^{-1}(y) \cap \overline{\Omega}$$
是 Ω 中的有限点集，因而可定义

$$\deg(f,\Omega,y) = \sum_{p \in \Omega \cap f^{-1}(y)} \operatorname{Sgn} f_{*,p}.$$

引理 1.3　在基本约定 1.1 的假定条件下，如果 $f_i \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N)$ $(i = 0,1)$ 和 $y \in N$ 适合条件

(1) $f_i \pitchfork_\Omega y$, $f_i(\partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$, $i = 0, 1$;

(2) 存在连续同伦 $H: f_0 \sim f_1$，使得

$$H(I \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\},$$

那么
$$\deg(f_0, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y).$$

证明 先将 N 光滑地嵌入到 $\boldsymbol{R}^k$ 之中(约定把 $\boldsymbol{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$,距离函数记为 d). 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域, $\gamma: \Gamma \to N$ 是相应的管状收缩映射. 通过适当的技术处理,不妨设同伦映射 H 适合以下这些条件:

$(H\text{-}1)$ $H \in C^0(\boldsymbol{R} \times \overline{\Omega}, N)$;

$(H\text{-}2)$ $H(t, \cdot) = \begin{cases} f_0(\cdot), & \forall t \in (-\infty, 1/3], \\ f_1(\cdot), & \forall t \in [2/3, +\infty); \end{cases}$

$(H\text{-}3)$ $H(\boldsymbol{R} \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$.

根据 Tietze 扩充定理,不妨设连续映射 $H: \boldsymbol{R} \times \overline{\Omega} \to N \subset \boldsymbol{R}^k$ 已扩充为 $H \in C^0(\boldsymbol{R} \times M, \boldsymbol{R}^k)$.

因为 $H(I \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$,所以

$$H(I \times \partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing.$$

取 $\varepsilon > 0$,使得

$$\{q \in \boldsymbol{R}^k \mid d(q, H(I \times \overline{\Omega})) < \varepsilon\} \subset \Gamma;$$

并取 $\delta \in (0, \varepsilon/2)$,使得

$$d(H(I \times \partial\Omega), \gamma^{-1}(y)) > 2\delta.$$

作 H 的光滑逼近 $G \in C^\infty(\boldsymbol{R} \times M, \boldsymbol{R}^k)$,使得

$$\|G(t,x) - H(t,x)\| < \delta, \quad \forall (t,x) \in \boldsymbol{R} \times \overline{\Omega}.$$

选取 $\eta \in C^\infty(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R})$,适合条件

$$\begin{cases} \eta(t) = 1, & \forall t \in [2/9, 7/9], \\ 0 < \eta(t) < 1, & \forall t \in (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9), \\ \eta(t) = 0, & \forall t \in \boldsymbol{R} \setminus (1/9, 8/9), \end{cases}$$

并记 $\Lambda = \{\lambda \in \boldsymbol{R}^k \mid \|\lambda\| < \delta\}$. 然后定义这样一个映射:

$$\Phi(t, x, \lambda) = \gamma(\eta(t)(G(t,x) + \lambda) + (1 - \eta(t))H(t,x))$$

$$(t\in \boldsymbol{R},\ x\in\overline{\Omega},\ \lambda\in\Lambda).$$

对 $\eta(t)>0$ 和 $\eta(t)=0$ 的情形分别进行验证，可知

$$(\Phi|\boldsymbol{R}\times\Omega\times\Lambda)\pitchfork y.$$

根据含参数的横截性定理(第 5 章定理 5.6)，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使得

$$(\Phi|\boldsymbol{R}\times\Omega\times\{\lambda_0\})\pitchfork y.$$

我们记 $$F(t,x)=\Phi(t,x,\lambda_0),$$

则 $F\in C^0(\boldsymbol{R}\times\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\boldsymbol{R}\times\Omega,N)$满足这样一些条件：

(F-1) $F(t,\cdot)=\begin{cases}f_0(\cdot), & \forall t\leqslant 1/9,\\ f_1(\cdot), & \forall t\geqslant 8/9;\end{cases}$

(F-2) $F(\boldsymbol{R}\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$;

(F-3) $(F|\boldsymbol{R}\times\Omega)\pitchfork y$.

依照 M 的定向赋予其开子集 $\Omega\subset M$ 定向，然后赋予 $I\times\Omega$ 以乘积定向. 于是 $I\times\Omega$ 的定向在 $0\times\Omega$ 和 $1\times\Omega$ 上分别诱导出“内向型”定向和“外向型”定向. 对于 $i=0,1$，我们定义映射

$$j_i: \Omega\to i\times\Omega,$$
$$p\mapsto(i,p).$$

易见 j_i 是保持定向的光滑同胚. 对于 $F_i=F|(i\times\Omega)$，显然有

(1.1) $$f_i=F_i\circ j_i,\quad i=0,1.$$

集合 $F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)=F^{-1}(y)\cap(I\times\overline{\Omega})$是 $I\times\Omega$ 的紧致的 1 维正则子流形. 对于 $X=I\times\Omega$ 和 $Y=N$ 引用第九章的命题 1.6 和注记 1.7，可以断定：

(1) 如果 $Z=F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)$的某个连通分支的两个端点$(0,p)$和$(1,q)$分属于“两岸”$0\times\Omega$ 和 $1\times\Omega$，那么

$$\mathrm{Sgn}(F_0)_{*,(0,p)}=\mathrm{Sgn}(F_1)_{*,(1,q)},$$

据此并利用(1.1)可得

(1.2) $$\mathrm{Sgn}(f_0)_{*,p} = \mathrm{Sgn}(f_1)_{*,q};$$

(2) 如果 $Z=F^{-1}(y)\cap(I\times\Omega)$的某个连通分支的两个端点是$(i,r)$和$(i,s)$(属于"同一岸"$i\times\Omega, i\in\{0,1\}$),那么

$$\mathrm{Sgn}(F_i)_{*,(i,r)} + \mathrm{Sgn}(F_i)_{*,(i,s)} = 0,$$

因而

(1.3) $$\mathrm{Sgn}(f_i)_{*,r} + \mathrm{Sgn}(f_i)_{*,s} = 0.$$

对于$(i,x)\in F^{-1}(y)\cap(i\times\Omega)$求 $\mathrm{Sgn}(f_i)_{*,x}$之和,利用上面得到的(1.2)式和(1.3)式就得到

(1.4) $$\deg(f_0,\Omega,y) = \deg(f_1,\Omega,y).$$

这样,我们完成了引理的证明. □

引理 1.4 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$适合条件

$$f(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\},$$

则存在 $f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$和 $H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$,使得

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega y$;

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$, $H(1,\cdot)=f(\cdot)$;

(3) $H(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$.

证明 将 N 光滑地嵌入 $\boldsymbol{R}^k$(约定把 $\boldsymbol{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$,距离函数记为 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$. 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域,并设

$$\gamma:\Gamma\to N$$

是相应的管状投影(管状收缩映射). 则存在 $\varepsilon>0$,使得

$$\{q\in\boldsymbol{R}^k \mid d(q,f(\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma.$$

因为 $f(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}$,所以 $f(\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(y)=\varnothing$. 因而存在 $\delta\in(0,\varepsilon/2)$,使得

(1.5) $$\mathrm{dist}(f(\partial\Omega),\gamma^{-1}(y)) > 2\delta.$$

根据 Tietze 定理,不妨设连续映射

$$f: \overline{\Omega} \to N \subset \boldsymbol{R}^k$$

已扩充为 $f \in C^0(M, \boldsymbol{R}^k)$. 选择 f 的光滑逼近 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^k)$，使得

(1) $g \pitchfork \gamma^{-1}(y)$；

(2) $\|g(x) - f(x)\| < \delta$, $\forall x \in \overline{\Omega}$.

然后定义这样一个映射：

$$G(t,x) := f(x) + (1-t)(g(x) - f(x)).$$

根据(1.5)和 g 所满足的条件(ii)，可以断定

$$g(\partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing, \quad G(I \times \partial\Omega) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing.$$

我们定义 $$f_0 = \gamma \circ g, \quad H = \gamma \circ G.$$

容易验证：f_0 和 H 满足引理的全部要求. □

定义 1.5 设 $f \in C^0(\overline{\Omega}, N)$适合条件 $f(\partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$. 根据引理 1.4 知，存在 $f_0 \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N)$ 和 $H \in C^0(I \times \overline{\Omega}, N)$，使得

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega y$；

(2) $H(0, \cdot) = f_0(\cdot)$, $H(1, \cdot) = f(\cdot)$；

(3) $H(I \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$.

我们定义 $$\deg(f, \Omega, y) := \deg(f_0, \Omega, y).$$

命题 1.6(同伦不变性) 定义 1.5 确当无歧义，并且所定义的 $\deg(f, \Omega, y)$ 有这样的同伦不变性：如果存在 $G \in C^0(I \times \overline{\Omega}, N)$，使得

(1) $G(0, \cdot) = f(\cdot)$, $G(1, \cdot) = g(\cdot)$,

(2) $G(I \times \partial\Omega) \subset N \setminus \{y\}$,

那么 $$\deg(g, \Omega, y) = \deg(f, \Omega, y).$$

命题 1.7(区域可加性) 设 M 和 N 是定向的光滑流形，

$\dim M=\dim N=n$，Ω 是 M 的开子集，其闭包 $\overline{\Omega}$ 紧致，并设 Ω_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 是含于 Ω 的有限个两两不相交的开集. 如果 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 和 $y\in N$ 满足条件

$$f\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\subset N\setminus\{y\},$$

那么
$$\deg(f,\Omega,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\deg(f,\Omega_\lambda,y).$$

证明 先将 N 光滑地嵌入到 $\boldsymbol{R}^k$ 之中. 约定将 $\boldsymbol{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$，距离函数记为 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$. 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域，并设

$$\gamma:\Gamma\to N$$

是相应的管状投影. 于是，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\{q\in\boldsymbol{R}^k\,|\,\mathrm{dist}(q,f(\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma.$$

因为
$$f\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\subset N\setminus\{y\},$$

所以
$$f\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\cap\gamma^{-1}(y)=\varnothing.$$

可设 $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，使得

(1.6)
$$\mathrm{dist}\left(f\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right),\ \gamma^{-1}(y)\right)>2\delta.$$

根据 Tietze 定理，不妨设连续映射

$$f:\overline{\Omega}\to N\subset\boldsymbol{R}^k$$

已扩充为 $f\in C^0(M,\boldsymbol{R}^k)$. 取 f 的光滑逼近 $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^k)$，满足条件：

(1) $g\pitchfork\gamma^{-1}(y)$；

(2) $\|g(x)-f(x)\|<\delta,\ \forall x\in\overline{\Omega}$.

然后定义

$$G(t,x)=f(x)+(1-t)(g(x)-f(x)).$$

根据(1.6)和 g 所满足的条件(2)可以确定

$$g\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\cap\gamma^{-1}(y)=\varnothing,$$

$$G\left(I\times\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\right)\cap\gamma^{-1}(y)=\varnothing.$$

我们记

$$f_0=\gamma\circ g,\quad H=\gamma\circ G.$$

则 f_0 和 H 满足条件：

(1) $f_0 \pitchfork y$；

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot),H(1,\cdot)=f(\cdot)$；

(3) $H\left(I\times\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\right)\subset N\setminus\{y\}$.

由(3)可知

$$H(I\times\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\};$$
$$H(I\times\partial\Omega_\lambda)\subset N\setminus\{y\},\quad\forall\lambda\in\Lambda;$$

并且显然有

$$\Omega\cap f_0^{-1}(y)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\Omega_\lambda\cap f_0^{-1}(y)).$$

因而

$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,y)&=\deg(f_0,\Omega,y)\\&=\sum_{p\in\Omega\cap f_0^{-1}(y)}\mathrm{Sgn}(f_0)_{*,p}\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{p\in\Omega_\lambda\cap f_0^{-1}(y)}\mathrm{Sgn}(f_0)_{*,p}\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}\deg(f_0,\Omega_\lambda,y)\end{aligned}$$

$$= \sum_{\lambda\in\Lambda}\deg(f,\Omega_\lambda,y). \qquad \square$$

记号约定 在不致于混淆的情形，往往将 $\deg(f,\Omega,y)$ 简单地记为

$$d(f,\Omega,y).$$

涉及这样的记号时，约定将距离函数记为

$$\mathrm{dist}(\cdot,\ \cdot).$$

推论 1.8（切除性质） 设 M,N 和 Ω 如命题 1.7 中所述，K 是含于 Ω 内的紧致集，$f\in C^0(\overline{\Omega},N)$. 如果

$$y\in N\setminus f(K\cup\partial\Omega),$$

那么

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega\setminus K,y).$$

证明 在命题 1.7 中取 $\Lambda=\{1\}$ 和 $\Omega_1=\Omega\setminus K$ 就得到切除性质. $\square$

下面的命题是依据映射度判断解的存在性的一个最简单的例子.

命题 1.9（Kronecker 存在性） 设 M,N 和 Ω 如命题 1.7 中所述. 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 和 $y\in N$ 符合条件

$$f(\partial\Omega)\subset N\setminus\{y\}.$$

如果

$$\deg(f,\Omega,y)\neq 0,$$

那么

$$\Omega\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing.$$

证明 先将 N 光滑地嵌入 $\boldsymbol{R}^k$. 约定将 $\boldsymbol{R}^k$ 中的范数记为 $\|\cdot\|$，距离函数记为 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$. 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域，并设 $\gamma:\Gamma\to N$ 是相应的管状投影. 于是，存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\{q\in\boldsymbol{R}^k\,|\,\mathrm{dist}(q,f(\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma.$$

如果 $\Omega\cap f^{-1}(y)=\varnothing$，那么存在 $\alpha\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，使得

$$\mathrm{dist}(f(\overline{\Omega}),\gamma^{-1}(y))>2\alpha. \tag{1.7}$$

不妨设连续映射 $f: \overline{\Omega} \to N \subset \boldsymbol{R}^k$ 已扩充为 $f \in C^0(M, \boldsymbol{R}^k)$. 取 f 的光滑逼近 $g \in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^k)$，使得

(1) $g \pitchfork \gamma^{-1}(y)$；

(2) $\|g(x) - f(x)\| < \alpha, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

然后定义

$$G(t,x) := f(x) + (1-t)(g(x) - f(x)).$$

于是

$$g(\overline{\Omega}) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing, \quad G(I \times \overline{\Omega}) \cap \gamma^{-1}(y) = \varnothing.$$

我们记 $\quad f_0 = \gamma \circ g, \quad H = \gamma \circ G,$

则有 $\quad f_0(\overline{\Omega}) \subset N \setminus \{y\}, \quad H(I \times \overline{\Omega}) \subset N \setminus \{y\}.$

因而 $\quad \deg(f, \Omega, y) = \deg(f_0, \Omega, y) = 0. \qquad \square$

§ 2 Leray 乘积公式

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$\overline{\Omega}$是紧致的. 本节考察 $f \in C^0(\overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^n)$ 的映射度. 这部分内容有很广的应用面. 为了便于查阅，我们首先综述此情形映射度的一般性质，然后证明 Leray 乘积公式.

首先，设 $g \in C^0(\overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^n) \cap C^\infty(\Omega, \boldsymbol{R}^n)$，$g(\partial\Omega) \subset \boldsymbol{R}^n \setminus \{y\}$ 并且 $(g|\Omega) \pitchfork y$. 对此情形，我们这样定义映射度：

$$\deg(g, \Omega, y) = \sum_{p \in g^{-1}(y) \cap \Omega} \operatorname{Sgn} g_{*,p}.$$

其次，对于一般的 $f \in C^0(\overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^n)$ 和 $y \in \boldsymbol{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$，存在 $g \in C^0(\overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^n) \cap C^\infty(\Omega, \boldsymbol{R}^n)$ 和 $H \in C^0(I \times \overline{\Omega}, \boldsymbol{R}^n)$，使得

(1) $(g|\Omega) \pitchfork y$；

(2) $H(0,\cdot)=f(\cdot)$, $H(1,\cdot)=g(\cdot)$;

(3) $H(I\times\partial\Omega)\subset\boldsymbol{R}^n\setminus\{y\}$.

我们定义

$$\deg(f,\Omega,y):=\deg(g,\Omega,y)$$

($\deg(\cdot,\Omega,y)$常常简写为 $d(\cdot,\Omega,y)$).

定理 2.1 如上所述的映射度具有这样一些基本性质:

(d_1) **标准性** 设 id 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中恒同映射的限制,$y\in\Omega$,则有

$$d(\mathrm{id},\Omega,y)=1;$$

(d_2) **同伦不变性** 如果 $F\in C^0(I\times\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$使得

$$F(I\times\partial\Omega)\subset\boldsymbol{R}^n\setminus\{y\},$$

那么对于 $F_t(\cdot)=F(t,\cdot)\in C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$有

$$d(F_t,\Omega,y)=d(F_0,\Omega,y),\quad\forall t\in I;$$

(d_3) **区域可加性** 设 $\Omega_\lambda(\lambda\in\Lambda)$是有限个两两不相交的 Ω 的开子集,并设

$$y\in\boldsymbol{R}^n\setminus f\left(\overline{\Omega}\setminus\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right),$$

则有

$$d(f,\Omega,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}d(f,\Omega_\lambda,y);$$

(d_4) **平移不变** 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$,$y\in\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$,则有

$$d(f,\Omega,y)=d(f-y,\Omega,0).$$

证明 (d_1) 是显然的. (d_2)和(d_3)就是上节的命题 1.6 和命题 1.7. 只有(d_4)尚须证明.

不妨设连续映射 $f:\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}^n$ 已扩充为 $f\in C^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$. 因为 $y\in\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$,所以存在 $\alpha>0$,使得

$$\mathrm{dist}(f(\partial\Omega),y)>2\alpha.$$

取 $f_0\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$,满足条件:

(1) $f_0\pitchfork y$;

(2) $\|f_0(x)-f(x)\|<\alpha, \quad \forall x\in\overline{\Omega}$.

考察映射

$$f_0-y:\begin{cases}\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n,\\ x\mapsto f_0(x)-y.\end{cases}$$

显然有

$$(f_0-y)\pitchfork 0, \quad (f_0-y)^{-1}(0)=f^{-1}(y).$$

因而
$$\begin{aligned}\deg(f,\Omega,y)&=\deg(f_0,\Omega,y)\\&=\deg(f_0-y,\Omega,0)\\&=\deg(f-y,\Omega,0).\end{aligned} \quad \square$$

注记 2.2 我们可以证明,性质(d_1)~(d_4)完全决定了 $C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$情形的映射度.

定理 2.3 如上所述的映射度还具有以下这些性质:

(d_5) **切除性质** 设 K 是含于 Ω 中的紧致集,$y\notin f(K)\cup f(\partial\Omega)$,则

$$d(f,\Omega,y)=d(f,\Omega\setminus K,y)$$

(在(d_3)中取 $\Lambda=\{1\},\Omega_1=\Omega\setminus K$ 即得);

(d_6) **Kronecker 存在性质** 如果 $y\in\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$使得 $d(f,\Omega,y)\neq 0$,那么

$$f^{-1}(y)\cap\Omega\neq\varnothing;$$

(d_7) **由边界值惟一确定** 设 $C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$中的映射 f 和 g 满足条件 $f|\partial\Omega=g|\partial\Omega$,则对于 $y\in\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$有

$$d(f,\Omega,y)=d(g,\Omega,y)$$

(在(d_2)中取 $F(t,x)=(1-t)f(x)+tg(x)$);

(d_8) 设 $\gamma\in C^0(I,\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega))$,则

$$d(f,\Omega,\gamma(t))=d(f,\Omega,\gamma(0)), \quad \forall t\in I$$

(应用(d_2)于 $d(f-\gamma(t),\Omega,0)$).

注记 2.4 根据(d_8),对于 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的一个连通分支中所有的 y,映射度 $d(f,\Omega,y)$ 都是同样的. 若集合 Δ 含于 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的某一个连通分支之中,则可定义

$$d(f,\Omega,\Delta):=d(f,\Omega,y)\quad(y\in\Delta).$$

引理 2.5 设 Γ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的紧致集,Δ 是 $\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma$ 的任意一个连通分支,则

$$\partial\Delta=\overline{\Delta}\setminus\Delta\subset\Gamma.$$

证明 $\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma$ 的各连通分支都是开集. Δ 中的点都是 Δ 的内点,其他连通分支中的点都是 Δ 的外点. 因而 Δ 的边界点全在 Γ 中,即 $\partial\Delta=\overline{\Delta}\setminus\Delta\subset\Gamma$. □

定理 2.6(Leray 乘积公式) 设

$$f\in C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n),\quad g\in C^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n),\quad z\in\boldsymbol{R}^n\setminus g(f(\partial\Omega)).$$

(d_9) 如果 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 是连通的(不存在有界的连通分支),那么

$$d(g\circ f,\ \Omega,\ z)=0.$$

(d_{10}) 如果 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的有界连通分支为 $\Delta_1,\cdots,\Delta_r$,那么

$$d(g\circ f,\Omega,z)=\sum_{i=1}^{r}d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z).$$

说明 这里须指出: $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 可以有无穷多个连通分支(当然是至多可数无穷多个). 因而 r 可以是 $+\infty$. 但事实上(d_{10})右端的求和式涉及的非 0 项仅有限多个,所以能够有效地求和. 还须指出: 对于 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的无界连通分支 Δ_0,因为 $\Delta_0\cap f(\overline{\Omega})$ 可以不是空集,所以下面开始讨论时也将 Δ_0 列入考察范围. 但因为无界连通分支之中必有 $z\in\Delta_0\setminus f(\overline{\Omega})$,所以

$$\deg(f,\Omega,\Delta_0)=\deg(f,\Omega,z)=0.$$

因此最后得到的求和式子中去掉了涉及 Δ_0 的项，(d_{10})的求和式从 $i=1$ 开始求和.

定理 2.6 的证明　为了计算映射度，需要分别用同伦于 f 和 g 的光滑映射 f_1 和 g_1 去逼近 f 和 g. 这些同伦逼近的光滑映射被要求满足一定的条件. 特别是不仅要求

$$(g\circ f)(\partial\Omega)\subset \boldsymbol{R}^n\setminus\{z\},$$

$$(g_1\circ f_1)(\partial\Omega)\subset \boldsymbol{R}^n\setminus\{z\},$$

而且要求在同伦的过程中始终保持这种包含关系. 为此，必须控制逼近偏差的幅度. 下面先对大致的思路作一个启发式的说明，然后再作严谨细致的表述.

首先，取 $\rho>0$，使得

$$f(\overline{\Omega})\subset B_\rho.$$

在下面的讨论中，将用符合一定要求的 f_t 去同伦逼近 f(这里简单地用一个带参数 t 的映射族 f_t 表示同伦过程，$t\in I=[0,1]$)，使得对于 $t\in I$ 有

$$\|f_t(x)-f(x)\|<\eta<\rho,\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

不等式中的 η 将在讨论中进一步确定，这里只是控制其范围为 $\eta\in(0,\rho)$. 满足所述条件的 f_t 必定使得

$$f_t(\overline{\Omega})\subset B_{2\rho}\subset\overline{\Omega}_{2\rho},\quad \forall t\in I.$$

于是，我们记

$$K=\overline{B}_{2\rho}.$$

因为 $\partial\Omega=\overline{\Omega}\setminus\Omega$ 是紧致集，并且 $z\notin g\circ f(\partial\Omega)$，所以存在 $\delta>0$，使得

$$\operatorname{dist}(g(f(\partial\Omega)),z)>3\delta.$$

在下面的讨论中，先选取符合一定条件的光滑映射 g_1 去逼近 g，使得

$$\|g_1(y) - g(y)\| < \delta, \quad \forall y \in K.$$

因为 $f(\partial\Omega) \subset f(\overline{\Omega}) \subset B_\rho \subset K$，所以

$$\mathrm{dist}(g_1(f(\partial\Omega)), z) > 2\delta.$$

鉴于在紧致集 K 上映射 g_1 的一致连续性，我们可以选择足够小的 $\eta \in (0, \rho)$，使得

$$y', y \in K, \ \|y' - y\| < \eta \Longrightarrow \|g_1(y') - g_1(y)\| < \delta.$$

如果 $f_t (t \in I)$满足不等式

$$\|f_t(x) - f(x)\| < \eta, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

那么自然也符合条件

$$f_t(\overline{\Omega}) \subset K.$$

因为 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega \subset \overline{\Omega}$，并且

$$\|g_1(f_t(x)) - g_1(f(x))\| < \delta, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

所以对于 $t \in I = [0,1]$，必有

$$\mathrm{dist}(g_1(f_t(\partial\Omega)), z) > \delta.$$

以上进行的探索，都是为了寻求能符合计算映射度的要求的同伦逼近. 下面将作逻辑上较为严谨的陈述.

(1) 设 $\rho > 0$ 使得 $f(\overline{\Omega}) \subset B_\rho$. 我们记

$$K = \overline{B}_{2\rho}. \tag{2.0}$$

因为 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ 是紧致集，并且 $z \notin g(f(\partial\Omega))$，所以存在 $\delta > 0$，使得

$$\mathrm{dist}(g(f(\partial\Omega)), z) > 3\delta. \tag{2.1}$$

(这里的 dist(·,·)表示 Euclid 距离.)

首先选取 $g_1 \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^n)$，满足条件

(a) $g_1 \pitchfork z$;

(b) $\|g_1(y)-g(y)\|<\delta,\ \forall y\in K.$

然后，对 $t\in I=[0,1]$，约定记

$$g_t(y)=g(y)+t(g_1(y)-g(y)).$$

于是，对于 $t\in I, x\in\partial\Omega$，必有

$$\|g_t(f(x))-g(f(x))\|<\delta.$$

因而

(2.2) $\quad \operatorname{dist}(g_t(f(x)),z)>2\delta,\quad \forall(t,x)\in I\times\partial\Omega.$

(2) 设 Δ_0 是 $\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的无界连通分支，我们记 $\widetilde{\Delta}_0=\Delta_0\cap B_{3\rho}$. 设紧致集

$$K\cap(g^{-1}(z)\cup g_1^{-1}(z))$$

被以下这有限个有界开集所覆盖

$$\widetilde{\Delta}_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{\tilde{r}}.$$

因为 $g_1^{-1}(z)$ 是孤立点集，所以 $g_1^{-1}(z)\cap\widetilde{\Delta}_0$ 和 $g_1^{-1}(z)\cap\Delta_i(i=1,\cdots,\tilde{r})$ 都是有限点集. 不妨设

$$g_1^{-1}(z)\cap\widetilde{\Delta}_0=\{y_{(0,1)},\cdots,y_{(0,s_0)}\};$$

$$g_1^{-1}(z)\cap\Delta_i=\{y_{(i,1)},\cdots,y_{(i,s_i)}\},\quad i=1,\cdots,\tilde{r}.$$

(实际情形可能某些交集是空集，我们将这些空集排除并另行编号，所以说是“不妨设”.)以下将 $y_{(i,j)}$ 简记为 $y_{i,j}$，并记

$$E=\{y_{i,j}\mid i=0,\cdots,\tilde{r};\ j=1,\cdots,s_i\}.$$

因为 $\widetilde{\Delta}_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{\tilde{r}}\subset\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega)$，自然有

$$E\subset\boldsymbol{R}^n\setminus f(\partial\Omega),$$

所以存在 $\eta\in(0,\rho)$ 满足以下两项要求.

(c) $\operatorname{dist}(f(\partial\Omega),E)>2\eta$;

(d) $y',y\in K,\|y'-y\|<\eta\Longrightarrow\|g_1(y')-g_1(y)\|<\delta.$

取 $f_1\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$，符合条件：

(e) $f_1 \pitchfork E$;

(f) $\|f_1(x)-f(x)\|<\eta,\ \forall x\in\overline{\Omega}$.

然后记

$$f_t(x)=f(x)+t(f_1(x)-f(x)),$$

这里的 $t\in I=[0,1]$,$x\in\overline{\Omega}$. 因为

$$f_t(\overline{\Omega})\subset B_{2\rho}\subset K,$$

并且 $$\|f_t(x)-f(x)\|<\eta,\quad \forall x\in\overline{\Omega},$$

所以 $$\|g_1(f_t(x)-g_1(f(x))\|<\delta,\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

于是有

(2.3) $$\operatorname{dist}(g_1(f_t(\partial\Omega)),z)>\delta,\quad \forall t\in I.$$

因为 $g_1(f_t(\partial\Omega))\subset\boldsymbol{R}^n\setminus\{z\}$,所以

(i) $d(g_1\circ f,\Omega,z)=d(g_1\circ f_1,\Omega,z)$;

(ii) $f_t(\partial\Omega)\subset\boldsymbol{R}^n\setminus E$.

(3) 对于 $i=0,1,\cdots,\tilde{r}$ 和 $j=1,\cdots,s_i$, 约定记

$$\begin{aligned}\alpha_i&=d(f,\Omega,\Delta_i)\\&=d(f,\Omega,y_{i,j})=d(f_1,\Omega,y_{i,j}),\\ \beta_{i,j}&=\operatorname{Sgn}(g_1)_{*,y_{i,j}}.\end{aligned}$$

显然有 $$\alpha_0=d(f,\Omega,\Delta_0)=0.$$

对于 $i\in\{1,\cdots,\tilde{r}\}$,因为 $\partial\Delta_i\subset f(\partial\Omega)$(引理 2.5),所以$\forall t\in I$ 有

$$g_t(\partial\Delta_i)\subset g_t(f(\partial\Omega))\subset\boldsymbol{R}^n\setminus\{z\}.$$

因而

(2.4) $$\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}=d(g_1,\Delta_i,z)=d(g,\Delta_i,z).$$

因为 $K\cap g_1^{-1}(z)$被 $\tilde{\Delta}_0,\Delta_1,\cdots,\Delta_{\tilde{r}}$所覆盖,并且 $f_1(\Omega)\subset$

$f_1(\overline{\Omega})\subset K$，所以经 $g_1\circ f_1$ 能映到 z 的那些点 $p\in\Omega$ 必定经 f_1 映到 E 中，反之亦然.

在作了以上准备之后，我们来进行关键的计算：

$$
\begin{aligned}
d(g\circ f,\Omega,z) &= d(g_1\circ f_1,\Omega,z) \\
&= \sum_{p\in\Omega\cap(g_1\circ f_1)^{-1}(z)} \operatorname{Sgn}(g_1\circ f_1)_{*,p} \\
&= \sum_{p\in\Omega\cap f_1^{-1}(E)} \operatorname{Sgn}(g_1\circ f_1)_{*,p} \\
&= \sum_{i=0}^{\bar{r}}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}\Big(\sum_{p\in\Omega\cap f_1^{-1}(y_{i,j})}\operatorname{Sgn}(f_1)_{*,p}\Big) \\
&= \sum_{i=0}^{\bar{r}}\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}\deg(f_1,\Omega,y_{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{\bar{r}}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}\Big),
\end{aligned}
$$

(4) 如果 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 是连通集(不存在有界的连通分支，那么(因为 $\alpha_0=0$))自然有

(d_9) $d(g\circ f,\Omega,z)=0$.

如果存在 $R^n\setminus f(\partial\Omega)$ 的有界连通分支，那么由(3)最后推导的式子可得：

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}_{10})\ d(g\circ f,\Omega,z) &= \sum_{i=0}^{\bar{r}}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\bar{r}}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{s_i}\beta_{i,j}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\bar{r}}\alpha_i d(g,\Delta_i,z)
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{\tilde{r}} d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z).$$

我们对最后一步等号成立的理由作一点说明. 为此，将指出：

$$d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z) = 0, \quad \forall i > \tilde{r},$$

因而这一步所添加的项都是等于 0 的项.

首先，$K \cap (g^{-1}(z) \cup g_1^{-1}(z))$被开集

$$\tilde{\Delta}_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_{\tilde{r}}$$

所覆盖，其他开集 $\Delta_i (i > \tilde{r})$ 与这些开集不相交. 因为 $f(\overline{\Omega}) \subset K$，所以对于 $i > \tilde{r}$ 必有

$$f(\overline{\Omega}) \cap g^{-1}(z) \cap \Delta_i = 0. \tag{2.5}$$

如果 $f(\Omega) \not\supset \Delta_i$（即 Δ_i 中有不属于 $f(\Omega)$的点），那么

$$d(f,\Omega,\Delta_i) = 0.$$

如果 $f(\Omega) \supset \Delta_i$，那么由(2.5)可得

$$g^{-1}(z) \cap \Delta_i = 0,$$

因而
$$d(g,\Delta_i,z) = 0.$$

不论是哪一种情形，我们都得到：

$$d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z) = 0, \quad \forall i > \tilde{r}. \qquad \square$$

注记 2.7 $d(g \circ f,\Omega,z)$是由 $g \circ f$ 在 $\overline{\Omega}$ 上的值（甚至是由 $g \circ f$ 在 $\partial\Omega$ 上的值）所决定的. 因此只须 $g \in C^0(f(\overline{\Omega}),\boldsymbol{R}^n)$ 就能确定 $d(g \circ f,\Omega,z)$. 对这情形，先用 Tietze 定理将 g 扩充为 $\tilde{g} \in C^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$，然后引用 Leray 乘积公式就得到

$$d(g \circ f,\Omega,z) = \sum_i{}' d(f,\Omega,\Delta_i)d(g,\Delta_i,z).$$

这里 $\sum'$ 表示仅对包含在 $f(\overline{\Omega})$中的那些 Δ_i 求和，因为对其他

的连通分支 Δ'' 有

$$d(f,\Omega,\Delta'') = 0.$$

§ 3 Jordan-Brouwer 分离定理

Jordan-Brouwer 分离定理是著名的 Jordan 曲线定理的一般化. 本节将利用 Leray 乘积公式证明 Jordan-Brouwer 分离定理,然后介绍该定理的若干重要应用.

定理 3.1 设 C 和 Γ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的紧致子集,它们之间存在同胚映射 $h: C \to \Gamma$. 则 $\boldsymbol{R}^n \setminus C$ 和 $\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma$ 有同样多个连通分支.

证明 设 $\boldsymbol{R}^n \setminus C$ 的连通分支为 $D_0, \cdots, D_r$(其中 D_0 为无界连通分支). 设 $\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma$ 的连通分支为 $\Delta_0, \cdots, \Delta_s$(其中 Δ_0 为无界连通分支). 我们先对 $0 < r < +\infty$ 情形证明 $r = s$.

引用 Tietze 定理,分别将

$$h: C \to \Gamma \quad 和 \quad h^{-1}: \Gamma \to C$$

扩充为连续映射

$$f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n \quad 和 \quad g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n.$$

考察 $\boldsymbol{R}^n \setminus C$ 的有界连通分支 D_i. 因为 $\partial D_i \subset C$(引理 2.5),所以

$$g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in \partial D_i. \tag{3.1}$$

设 $\boldsymbol{R}^n \setminus f(\partial D_i) = \boldsymbol{R}^n \setminus h(\partial D_i)$ 的连通分支为 $E_0, \cdots, E_q$(其中 E_0 为无界连通分支). 注意到(3.1)式,鉴于映射度的性质(d_1),(d_7)和(d_{10}),对 $y \in D_i$ 我们有

$$1 = d(g \circ f, D_i, y) = \sum_{k=1}^{q} d(f, D_i, E_k) d(g, E_k, y).$$

另一方面,因为

(1) Δ_j 是 $\boldsymbol{R}^n \setminus \Gamma$ 的连通分支;

(2) E_k 是 $\boldsymbol{R}^n \setminus f(\partial D_i)$ 的连通分支;

(3) $\partial D_i \subset C, f(\partial D_i) \subset f(C) = \Gamma$, $\mathbf{R}^n \setminus \Gamma \subset \mathbf{R}^n \setminus f(\partial D_i)$，所以每个 Δ_j 包含在某个确定的 $E_{l(j)}$ 之中. 特别有

(3.2) $$\Delta_0 \subset E_0.$$

所有的 Δ_i 分别含于相应的 $E_{l(i)}$ 之中. 于是，除去 $\bigcup_{\Delta_j \subset E_k} \Delta_j$ 的点之后，E_k 至多只剩有属于 Γ 的点，即

$$E_k \Big\backslash \Big(\bigcup_{\Delta_j \subset E_k} \Delta_j \Big) \subset \Gamma.$$

于是 $$g\Big(E_k \Big\backslash \Big(\bigcup_{\Delta_j \subset E_k} \Delta_j \Big)\Big) \subset g(\Gamma) = C.$$

对于 $y \in D_i$，必有

$$g\Big(E_k \Big\backslash \Big(\bigcup_{\Delta_j \subset E_k} \Delta_j \Big) \subset C \subset \mathbf{R}^n \setminus \{y\}.$$

因而

(3.3) $$d(g, E_k, y) = \sum_{\Delta_j \subset E_k} d(g, \Delta_j, y).$$

因为 $\partial D_i \subset C$，所以

$$g(f(x)) = x, \quad \forall x \in D_i.$$

根据(d_7)，(d_{10})和(3.3)，我们得到

(3.4) $$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{q} d(f, D_i, E_k) d(g, E_k, y) \\ &= \sum_{k=1}^{q} d(f, D_i, E_k) \Big(\sum_{\Delta_j \subset E_k} d(g, \Delta_j, y) \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{\Delta_j \subset E_k} d(f, D_i, E_k) d(g, \Delta_j, y). \end{aligned}$$

对于那些含于 E_0 中的有界的 $\Delta_j (j \geqslant 1)$，必有

(3.5) $$d(f, D_i, \Delta_j) = d(f, D_i, E_0) = 0$$

(这里的 $\Delta_j \subset E_0, j \geqslant 1$).

为了便于整理，我们给(3.4)的求和式添加涉及(3.5)的一些等于0的项. 这样对 $y\in D_i$ 得到

$$1=\sum_{k=0}^{q}\sum_{\substack{\Delta_j\subset E_k\\ j\geq 1}}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,y).$$

整理所得的式子，写出

(3.6) $$1=\sum_{j=1}^{s}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,D_i).$$

同样可得

(3.7) $$1=\sum_{i=1}^{r}d(g,\Delta_j,D_i)d(f,D_i,\Delta_j).$$

对 $i=1,\cdots,r$ 将(3.6)式求和并利用(3.7)式就得到

$$\begin{aligned}r&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}d(f,D_i,\Delta_j)d(g,\Delta_j,D_i)\\&=\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}d(g,\Delta_j,D_i)d(f,D_i,\Delta_j)\\&=s.\end{aligned}$$

以上对 $0<r<+\infty$ 情形证明了定理.

用下面所述的办法，可以将已证明的结论拓展到 $0\leqslant r<+\infty$ 情形. 首先，取足够大的正实数 ρ，使得 $C\cup\Gamma\subset B_\rho$. 约定记 $K=\overline{B}_{2\rho}$，并记

$$C'=C\cup\partial K,\quad \Gamma'=\Gamma\cup\partial K.$$

显然 C' 和 Γ' 都是紧致集，并且 C' 同胚于 Γ'. 另一方面，$\boldsymbol{R}^n\setminus C'$ 与 $\boldsymbol{R}^n\setminus\Gamma'$ 的有界连通分支的数目分别为

$$r'=r+1\quad 与\quad s'=s+1,$$

并且显然有 $0<r'<+\infty$. 根据前面已经证明的结果

$$r'=s',$$

因而 $r=s$.

如果 $r=+\infty$，那么必有 $s=+\infty$. 否则，根据上面的讨论，

由 $0\leqslant s<+\infty$，可得 $r=s<+\infty$.

至此，对所有的情形，我们完成了定理的证明. □

定理 3.2（Jordan-Brouwer 分离定理） 如果 $M\subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是球面 S^n 的同胚像，那么 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支，并且每个连通分支的边界都是 M.

证明 首先，由引理 3.1 可知，$\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支，设为 Δ_0 和 Δ_1（都是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集）. 其次，在引理 2.5 中，我们已经证明了

$$\partial\Delta_i\subset M,\quad i=0,1.$$

因此，留待证明的仅仅是：任何 $q\in M$ 都是 Δ_0 和 Δ_1 共同的边界点.

任取 q 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个开邻域 V. 设 h 是从 S^n 到 M 的同胚映射，$q=h(p)$. 在 S^n 上，取以 p 为中心的 n 维“开圆盘式”邻域 B，使得

$$h(\overline{B})\subset V\cap M.$$

因为 $S^n\setminus B$ 是 n 维“闭圆盘式”紧致集，所以 $h(S^n\setminus B)$ 不能分离 $\boldsymbol{R}^{n+1}$. 因而有 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus h(S^n\setminus B)$ 中的连续曲线 γ，使得

$$\gamma(0)\in\Delta_0,\quad \gamma(1)\in\Delta_1.$$

于是，存在 $\tau\in(0,1)$，使得

$$\gamma(\tau)\in h(B).$$

我们记

$$\tau_0=\inf\{\tau\in I\,|\,\gamma(\tau)\in h(B)\},\quad \tau_1=\sup\{\tau\in I\,|\,\gamma(\tau)\in h(B)\}.$$

则有
$$\gamma(\tau_i)\in h(\overline{B})\subset V,\quad i=0,1;$$

并且有
$$\gamma([0,\tau_0))\subset\Delta_0,\quad \gamma((\tau_1,1])\subset\Delta_1.$$

于是，存在 $t_0\in(0,\tau_0)$ 和 $t_1\in(\tau_1,1)$，使得

$$\gamma(t_i)\in V\cap\Delta_i,\quad i=0,1.$$

因而

$$V \cap \Delta_i \neq \varnothing, \quad i = 0,1.$$

这证明了 q 是 Δ_0 和 Δ_1 共同的边界点(参看图 28). □

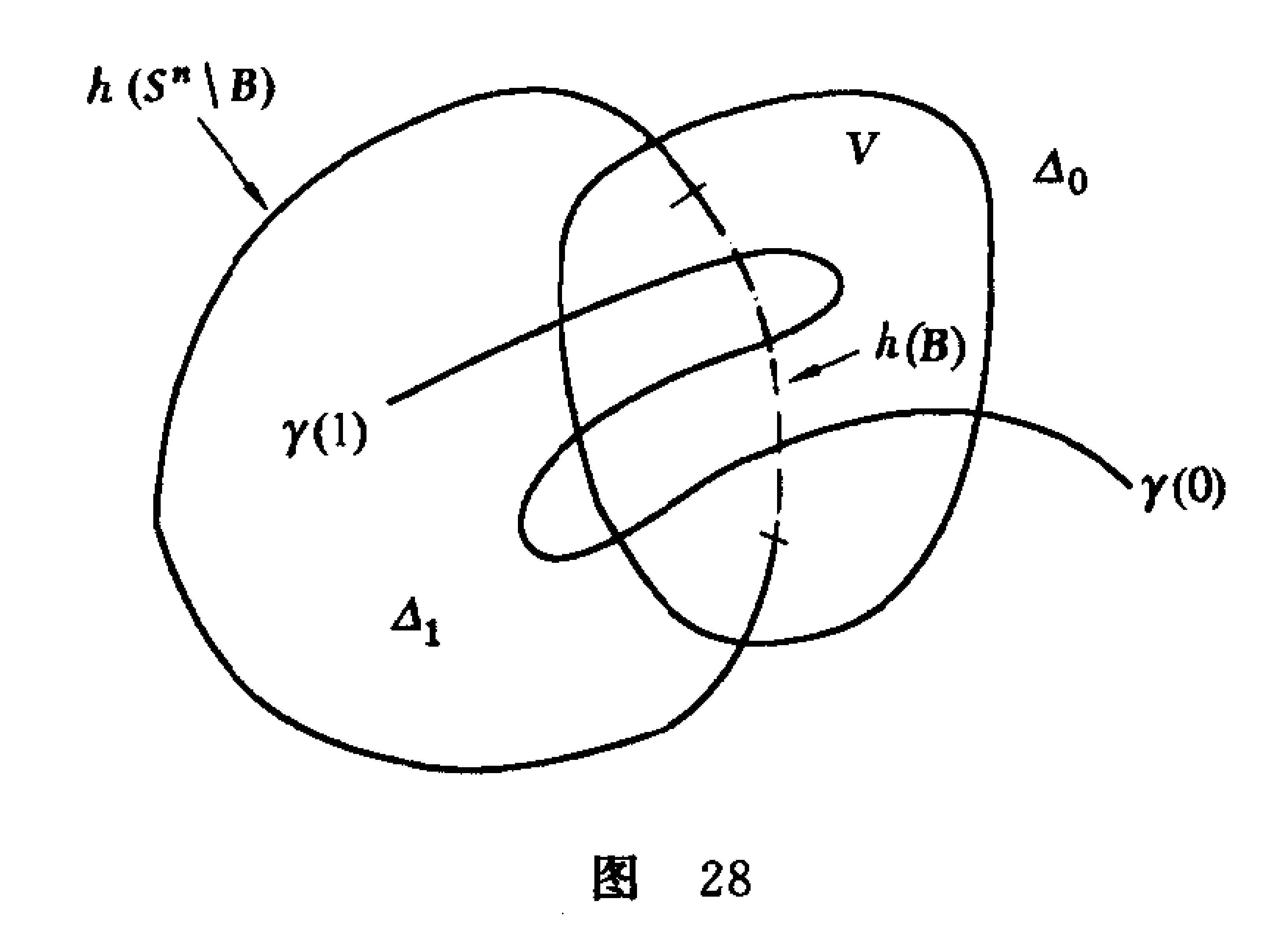


图 28

定理 3.3(区域不变性定理) 设 U 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集, $h: U \to V \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$ 是从 U 到 $V = h(U)$ 的同胚映射,则 V 也是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集.

证明 对任意的 $q = h(p) \in V$,取一个以 p 为中心的 $n+1$ 维闭球体 $D \subset U$. 于是 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus h(\partial D)$ 恰有两个连通分支: Δ_0 和 Δ_1. 每个连通分支都是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集. 因为 $W = h(\mathrm{int}\, D)$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus h(\partial D)$ 中的连通集,所以必有一个 $\Delta = \Delta_i (i \in \{0,1\})$ 使得

$$W \subset \Delta.$$

下面将证明: 实际上只能有 $W = \Delta$(因而只可能是 $W = \Delta_1$).

假设 $W \subsetneq \Delta$,则集合

$$\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus h(D) = (\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus h(\partial D)) \setminus W = (\Delta_0 \cup \Delta_1) \setminus W$$

既含有 Δ_0 的点,又含有 Δ_1 的点,并且 $\Delta_0 \cap \Delta_1 = \varnothing$. 但这与 $h(D)$ 不能分离 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的事实相矛盾.

我们证明了: 对于 V 的任意一点 q,存在 q 的开邻域 $W = \Delta \subset V$. 因而 V 是一个开集. □

定理 3.4(维数不变性) 设 U 是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的开集，V 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集. 若 U 同胚于 V，则必有 $m=n$.

证明 用反证法. 假设 $m>n$. 因为存在从 $U\subset\boldsymbol{R}^{m+1}$ 到

$$V\subset\boldsymbol{R}^{n+1}\subset\boldsymbol{R}^{m+1}$$

的同胚，所以 V 是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中的开集. 但这与

$$V\subset\boldsymbol{R}^{n+1},\quad n<m$$

相矛盾. 因而只能有 $m\leqslant n$. 同样可证 $n\leqslant m$. □

§4 紧致超曲面的分离性质

定义 4.1 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的任何一个连通的 n 维光滑正则子流形被称为($\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的)**超曲面**.

本节讨论 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中紧致超曲面 M 的分离性质. 将证明 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支，这两个连通分支以 M 为共同的边界，$\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 的无界连通分支 D_0 被称为外部区域，有界连通分支 D_1 被称为内部区域. 指向外部(或内部)的“法方向”在 M 上诱导出确定的定向. 因而任何一个紧致的超曲面 M 都是可定向的. 这一重要事实将在第十二章 §2 的讨论中用到.

引理 4.2 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，$q\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$. 则对于任意的 $p\in M$ 和 p 点在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的任意开邻域 W，存在 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 中的连续曲线将 q 点与 W 中的某个点联结.

证明 首先，对于给定的 $q\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$，记

$$E=\{p\in M\,|\,p\text{ 点满足所述的要求}\}.$$

我们将证明：

(1) $E\neq\varnothing$；

(2) E 是 M 中的既开且闭的集合.

以上两项得到确认之后，根据 M 的连通性，就可以断定 $E=M$，

从而完成引理的证明.

(1)的验证. 因为 M 是紧致的，所以存在 $p_0 \in M$，使得

$$d(p_0, q) = d(M, q).$$

联结 p_0 点与 q 点的直线段除了端点 p_0 而外全在 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 之中. 可见 $p_0 \in E$.

(2)的验证. 对于任意的 $p \in M$，存在 p 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的关于 M 为正则的开邻域 U，使得 $U \cap (\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M)$ 恰有两个连通分支，并且 $U \cap M$ 恰好是这两个连通分支边界集合的交集. 若 p 的任何一个邻域中都有点能用 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 中的连续曲线与 q 点联结，显然 $U \cap M$ 中的任意一点 p' 也具有同样的性质. 这证明了 E 是 M 中的开集. 仿此可以证明 E 是 M 中的闭集. □

引理 4.3 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，则 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 至多只有两个连通分支，并且每个连通分支都以 M 为其边界集.

证明 任意取定一点 $p \in M$. 设 U 是 p 点在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开邻域，$U \cap (\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M)$ 恰有两个连通分支 U_0 和 U_1，并且 $U \cap M$ 恰好是 U_0 的边界集合与 U_1 的边界集合的交集合. 任何 $q \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 都可用 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 中的连续曲线与 U_0 或 U 中的点相联结，所以 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 至多只有两个连通分支.

因为 p 点可以在 M 上任意选取，并且对于 p 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的任意一个开邻域 W，存在 $U \subset W$ 具有上面所述的性质，所以 M 的每一点都是 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 的各连通分支的边界点. □

引理 4.4 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的超曲面，$q \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$，$\theta$ 是这样一个映射

$$\theta : M \to S^n,$$

$$x \mapsto \frac{x - q}{\|x - q\|}.$$

对于 $v \in S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}$，考察射线

$$r_v = \{q + tv \mid t \in (0, +\infty)\}.$$

我们断定 $$\theta \pitchfork v \Longleftrightarrow M \pitchfork r_v,$$

并且,如果这两相互等价的条件之一成立,那么必有

$$\#\theta^{-1}(v) = \#(r_v \cap M).$$

证明 我们来考察放入映射

$$\Psi : M \to \boldsymbol{R}^{n+1}$$

和映射 θ 的扩充

$$\Theta : \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{q\} \to S^n,$$

$$x \mapsto \frac{x-q}{\|x-q\|}.$$

易见对任意的 $v \in S^n$ 都有

$$\Theta \pitchfork v, \quad \Theta^{-1}(v) = r_v.$$

根据第五章的引理 5.5,可以断定

$$\Theta \circ \Psi \pitchfork v \Longleftrightarrow \Psi \pitchfork r_v.$$

这就是 $$\theta \pitchfork v \Longleftrightarrow M \pitchfork r_v. \qquad \square$$

引理 4.5 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面,q_1 和 q_2 是 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 中的两点,并且从 q_1 点出发通过 q_2 点的射线与 M 相横截. 如果该射线上从 q_1 点到 q_2 点的线段与 M 相交 k 次,那么

$$W_2(M, q_1) = W_2(M, q_2) + k \pmod 2.$$

证明 首先取

$$v = \frac{q_2 - q_1}{\|q_2 - q_1\|}.$$

然后,对于 $i = 1, 2$,考察映射

$$\theta_i : M \to S^n,$$

$$x \mapsto \frac{x - q_i}{\|x - q_i\|}$$

和射线

$$r_i = \{q_i + tv \mid t \in (0, +\infty)\}.$$

根据引理 4.4，v 是 θ_1 和 θ_2 共同的正则值. 还容易看出：

$$\#\theta_1^{-1}(v) = \#\theta_2^{-1}(v) + k \pmod 2.$$

因而 $$W_2(M, q_1) = W_2(M, q_2) + k \pmod 2. \qquad \square$$

引理 4.6 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面，q_1 和 q_2 属于 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 的同一个连通分支，则

$$W_2(M, q_1) = W_2(M, q_2).$$

证明 设 q_t 是 $\boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 中联结 q_1 和 q_2 的连续曲线，则

$$\theta_t(x) = \frac{x - q_t}{\|x - q_t\|} \quad ((t, x) \in I \times M)$$

是映射 θ_1 与 θ_2 之间的同伦映射，因而

$$W_2(M, q_1) = W_2(M, q_2). \qquad \square$$

引理 4.7 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面. 则存在 $q \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$ 和 $v \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus \{0\}$，使得相应的射线

$$r_v = \{q + tv \mid t \in (0, +\infty)\}$$

满足这样两个条件：

$$r_v \pitchfork M; \quad r_v \cap M \neq \varnothing.$$

证明 第一个条件很容易办到：根据引理 4.4，对任意的 $q \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$，只须取 $v \in S^n$ 为 θ 的正则值即可. 关键在于满足两个条件的要求，特别是其中的第二个条件，该条件相当于

$$\theta^{-1}(v) \neq \varnothing.$$

我们先在 M 上取一点 a，然后在 M 过 a 点的法线上取一点 $q \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus M$. 必要时对 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 作适当的正交变换，不妨设

$$q=(0,\cdots,0,0),\quad a=(0,\cdots,0,c),$$

并且 $c>0$. 设 ω 是 M 到 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的放入映射,(U,φ)是 a 点邻近 M 的局部坐标图卡.

于是

$$\omega\circ\varphi^{-1}(t_1,\cdots,t_n)$$

就是 $M\hookrightarrow\boldsymbol{R}^{n+1}$在 a 点邻近的局部参数表示. 为避免繁琐记号,以下将这局部参数表示简单地写成

$$x=x(t_1,\cdots,t_n),$$

并将其分量记为

$$x_i=x_i(t_1,\cdots,t_n),\quad i=1,\cdots,n+1.$$

因为 M 在 a 点的切平面平行于坐标平面

$$OX_1\cdots X_n,$$

所以

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)_{i,j=1}^{n}\Bigg|_{\varphi(a)}\neq 0.$$

考察映射

$$\theta: M\to S^n,$$

$$x\mapsto\frac{x}{\|x\|}.$$

在 $b=\theta(a)=(0,\cdots,0,1)$邻近,可以将 $S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$到坐标平面 $OX_1\cdots X_n$ 的标准投射当作 S^n 的局部坐标映射. 于是,相应地可将 θ 局部表示成 $\widetilde{\theta}$,该局部表示的各分量为

$$\widetilde{\theta}_i(t_1,\cdots,t_n)=\frac{x_i(t_1,\cdots,t_n)}{\|x(t_1,\cdots,t_n)\|},\quad i=1,\cdots,n.$$

注意到 a 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的前 n 个坐标都是 0:

$$x_i(\varphi(a))=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

对 $i,j\in\{1,\cdots,n\}$,我们算出

$$\left.\frac{\partial\widetilde{\theta}_i}{\partial t_j}\right|_{\varphi(a)}=\left.\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\frac{1}{\|x\|}+x_i\frac{\partial}{\partial t_j}\left(\frac{1}{\|x\|}\right)\right)\right|_{\varphi(a)}$$

$$=\left.\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\cdot\frac{1}{c}\right)\right|_{\varphi(a)},$$

因此
$$\det\left.\left(\frac{\partial\widetilde{\theta}_i}{\partial t_j}\right)\right|_{\varphi(a)}=\frac{1}{c^n}\det\left.\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)\right|_{\varphi(a)}\neq 0.$$

根据逆函数定理,θ 将 M 在 a 点的某个开邻域 $P\subset U$ 同胚地映射到 S^n 在 $b=\theta(a)$点的某个开邻域 $V=\theta(P)$. 在开集 V 中,必有 θ 的正则值 v. 根据引理 4.4,因为 $\theta\pitchfork v$, 所以

$$r_v\pitchfork M.$$

设 $v=\theta(p)$,这里的 $p\in P\subset U\subset M$,则有

$$p\in r_v\cap M.\qquad\square$$

定理 4.8 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的紧致超曲面. 则 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支: 无界的连通分支

$$D_0=\{q\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M\mid W_2(M,q)=0\}$$

和有界的连通分支

$$D_1=\{q\in\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M\mid W_2(M,q)=1\}.$$

证明 设 $p\in M$ 如引理 4.7 证明中所述. 因为

$$p\in r_v\cap M,\quad r_v\pitchfork_p M,$$

所以存在 r_v 上 p 点邻近的两点 q_0 和 q_1,使得 q_0 与 q_1 之间 r_v 与 M 的交点只有单独一个 p 点. 根据引理 4.5,

$$W_2(M,q_1)=W_2(M,q_0)+1\ (\mathrm{mod}\ 2).$$

不妨设 $q_0\in D_0,q_1\in D_1$. 因而 D_0 和 D_1 都不是空集.

我们注意到这样一些重要事实:

(1) $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M=D_0\cup D_1$，$D_0\cap D_1=\varnothing$；

(2) $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 至多只有两个连通分支(引理 4.3)，并且每个连通分支完全包含在某一个确定的 D_i 之中(引理 4.6)．

因为 D_0 和 D_1 都不是空集，所以 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus M$ 恰有两个连通分支，这两个连通分支就是 D_0 和 D_1．还容易证明(练习 J. 9)：D_0 是无界连通分支，D_1 是有界连通分支． □

练　习　J

J. 1. (推广的 Rouché 定理)设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界开集；$f,g\in C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^n)$．如果

$$0<\|g(x)\|<\|f(x)\|,\quad \forall x\in\partial\Omega,$$

那么
$$d(f+g,\Omega,0)=d(f,\Omega,0).$$

J. 2. 设 $f\in C^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$，$D=D^n$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中以原点 O 为中心的闭单位球体．如果 $f(\partial D)=\partial D$，则 $d(f^{(m)},D,0)=(d(f,D,0))^m$．这里 $f^{(m)}=f\circ f^{(m-1)}$表示 m 个 f 的复合．

J. 3. 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的有界开集，V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界开集，$f\in C^0(\overline{U},\boldsymbol{R}^m)$，$g\in C^0(\overline{V},\boldsymbol{R}^n)$，$a\in\boldsymbol{R}^m\setminus f(\partial U)$，$b\in\boldsymbol{R}^n\setminus g(\partial V)$．考察映射

$$(f,g):\overline{U}\times\overline{V}\to\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n,$$
$$(u,v)\mapsto(f(u),g(v)).$$

试证明 $d((f,g),U\times V,(a,b))=d(f,U,a)d(g,V,b)$．

J. 4. 约定以$(\cdot,\cdot)$表示 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的内积．设 $f\in C^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)$满足条件

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{(f(x),x)}{\|x\|}=+\infty,$$

求证 $f(\boldsymbol{R}^n)=\boldsymbol{R}^n$．

J. 5. 设 F 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的闭集．求证 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus F$ 至多只有可数个

连通分支.

J.6. 设 F 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的闭集，U 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus F$ 的一个连通分支. 求证 $U\cup F$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的闭集.

J.7. 分别举出满足以下条件的例子（在各小题中，要求 Ω 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的有界开集，并且要求 $f\in C^0(\overline{\Omega},\boldsymbol{R}^{n+1})$ 不是常值映射）：

(1) $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 是连通的；

(2) $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 不连通，Δ_0 是其无界连通分支，却有

$$\Delta_0\cap f(\Omega)\neq\varnothing;$$

(3) $\boldsymbol{R}^{n+1}\setminus f(\partial\Omega)$ 不连通，并且至少存在某一个有界连通分支 Δ，使得 $\Delta\cap f(\Omega)=\varnothing$.

J.8. 设 U 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集，并设 $h: U\to\boldsymbol{R}^{n+1}$ 是连续的单映射. 试证 $V=h(U)$ 也是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的开集，并且 $h: U\to V$ 是同胚映射.

J.9. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面. 求证存在实数 $K>0$，使得只要 $q\in\boldsymbol{R}^{n+1}$，$\|q\|>K$，就有 $W_2(M,q)=0$.

第十一章　相交数，向量场奇点的指标与 Poincaré-Hopf 定理

§1　模 2 相交数

定义 1.1　设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，S 是 N 的闭的正则子流形，并且

$$\dim M + \dim S = \dim N.$$

如果 $f: M \to N$ 是光滑映射，适合条件

$$f \pitchfork S,$$

那么 $f^{-1}(S)$ 是有限点集. 我们把 f 与 S 的**模 2 相交数**定义为

$$I_2(f,S) := \# f^{-1}(S) \pmod 2.$$

一般约定　设 M 是紧致光滑流形，N 是光滑流形，S 是 N 的闭的正则子流形，并且

$$\dim M + \dim S = \dim N.$$

引理 1.2　设 X 是紧致光滑带边流形，$\partial X = M$. 如果 $F \in C^\infty(X,N)$ 满足条件

$$F \pitchfork S, \quad \partial F \pitchfork S,$$

那么 $f = \partial F$ 与 S 的模 2 相交数是 0，即：$I_2(f,S) = 0$.

证明　因为

$$\dim X - \dim F^{-1}(S) = \dim N - \dim S,$$

$$\dim M + 1 - \dim F^{-1}(S) = \dim M,$$

$$\dim F^{-1}(S) = 1,$$

所以 $F^{-1}(S)$ 是紧致的 1 维带边流形. 集合 $f^{-1}(S) = F^{-1}(S) \cap \partial X$ 含有偶数个点，因而

$$\# f^{-1}(S) = 0 \pmod 2. \qquad \square$$

引理 1.3 设 $f_i \in C^{\infty}(M,N)(i=1,2)$适合条件

$$f_1 \pitchfork S, \quad f_2 \pitchfork S.$$

如果 $f_1 \sim f_2$(C^0 同伦),那么

$$I_2(f_1,S) = I_2(f_2,S).$$

证明 f_1 必定也光滑同伦于 f_2,即存在光滑映射 $H: I\times M \to N$,使得

$$H(t,\cdot) = f_1(\cdot), \quad \forall t \in [0,\delta],$$
$$H(t,\cdot) = f_2(\cdot), \quad \forall t \in [1-\delta,1].$$

因为 H 在$([0,\delta]\times M)\cup([1-\delta,1]\times M)$与 S 横截,根据横截扩张定理,存在光滑映射 $F: I\times M \to N$,使得

(1) $F(t,x)=H(t,x)$, $\forall t\in[0,\delta]\cup[1-\delta,1], x\in M$;

(2) $F \pitchfork S$.

根据引理 1.2,对于 $X=I\times M$ 我们有

$$I_2(\partial F,S) = 0. \tag{1.1}$$

因为 $\partial F|(0\times M)=f_1$,$\partial F|(1\times M)=f_2$,所以(1.1)可以写成

$$I_2(f_1,S) + I_2(f_2,S) = 0 \pmod 2.$$

由此得知

$$I_2(f_1,S) = I_2(f_2,S). \qquad \square$$

引理 1.4 设 $f\in C^0(M,N)$,则存在 $f_1 \in C^{\infty}(M,N)$,使得

$$f_1 \sim f, \quad f_1 \pitchfork S.$$

证明 先取光滑映射 $f_0 \sim f$,然后根据横截逼近定理确认存在适合要求的 $f_1 \in C^{\infty}(M,N)$. $\square$

定义 1.5 设 M 是紧致光滑流形,N 是光滑流形,S 是 N 的闭正则子流形,$\dim M + \dim S = \dim N$,$f\in C^0(M,N)$,并设

$f_1 \in C^{\infty}(M,N)$适合条件

$$f_1 \sim f, \quad f_1 \pitchfork S.$$

我们把 f 与 S 的模 2 相交数定义为

$$I_2(f,S) := I_2(f_1,S).$$

命题 1.6 定义 1.5 确当无歧义，并且所定义的 $I_2(f,S)$ 关于 f 是同伦不变的.

证明 可仿照第八章命题 1.6 作出证明. □

§2 定向相交数

引理 2.1 设 $r \geqslant 1$，并设

(a) X 是 $1+m$ 维定向带边 C^r 流形；

(b) Y 是 $s+m$ 维定向无边 C^r 流形，S 是 Y 的定向的正则 s 维子流形，且 S 是 Y 的闭子集；

(c) $F \in C^r(X,Y)$适合条件

$$F \pitchfork S, \quad \partial F \pitchfork S;$$

(d) $Z = F^{-1}(S)$是 X 中的紧致集.

则存在一族覆盖了 S 且关于 S 正则的 Y 的正向局部坐标图卡 $\{(V,\psi)\}$ 和有限个覆盖了 Z 的 X 的正向局部坐标图卡 $\{(U,\varphi)\}$，其中

$$\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \cdots, \varphi^m),$$

使得

(0) 各 ψ 的前 s 个分量是 S 的正向局部坐标；

(1) 在点 $p \in Z = F^{-1}(S)$和点 $q = F(p)$邻近，分别有如上所述的适当的 φ 和 ψ，使得 F 的局部表示成为

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(u^0, u^1, \cdots, u^m) = (\eta^1(u), \cdots, \eta^s(u), u^1, \cdots, u^m),$$

这里 $u=(u^0,u^1,\cdots,u^m)$；

(2) $\{(U\cap Z,\varphi^0|Z)\}$是 Z 的一个定向的 C^r 图汇；

(3) $Z\cap\partial X$ 由偶数个点组成；恰好在其中半数个点处，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$给出的 ∂X 的局部坐标系属于“内向型”诱导定向；而在另外半数个点处，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$给出的 ∂X 的局部坐标系属于“外向型”诱导定向.（在 Z 的每个同胚于$[0,1]$的连通分支的两端，由$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$给出的 ∂X 的局部坐标系属于不同类型的诱导定向.）

证明 (0) 首先，选取一族覆盖了 S 且关于 S 正则的 Y 的正向局部坐标图卡$\{(V,\psi)\}$. 必要时改变 ψ 的第一个坐标轴和最后一个坐标轴的方向，总能使得 ψ 的前面 s 个分量成为 S 的正向局部坐标.

(1) 考察集合族$\{F^{-1}(V)\}$，其中$\{V\}$是(0)项中所述的那些局部坐标域. 我们可以选取有限个 X 的正向局部坐标图卡$\{(U,\varphi)\}$，使得相应的局部坐标域族$\{U\}$从属于$\{F^{-1}(V)\}$，并且使得$\{U\}$覆盖了紧致集 $Z=F^{-1}(S)$，还使得 F 的相应的局部表示成为横截的典范局部表示(参看第五章的命题 2.4)：

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}(u^0,u^1,\cdots,u^m)=(\eta^1(u),\cdots,\eta^s(u),u^1,\cdots,u^m),$$

这里 $u=(u^0,u^1,\cdots,u^m)$.

(2) 考察流形 X 在点 $p\in Z$ 邻近的任意两个满足(1)中要求的正向局部坐标系$(u^0,u^1,\cdots,u^m)$和$(w^0,u^1,\cdots,u^m)$. 因为

$$\frac{\partial(w^0,u^1,\cdots,u^m)}{\partial(u^0,u^1,\cdots,u^m)}=\left|\begin{array}{c:ccc}\frac{\partial w^0}{\partial u^0} & & * & \\ \hdashline & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1\end{array}\right|>0,$$

所以

$$\frac{\partial w^0}{\partial u^0} > 0.$$

可见，所述各坐标系的 φ^0 坐标给出 Z 的一个定向 C^r 图汇.

(3) Z 是紧致的 1 维微分流形. 它的每个连通分支微分同胚于[0,1]或者 S^1. 因而 $\partial Z = Z \cap \partial X$ 由偶数个点组成. 考察 Z 的一个确定的[0,1]型连通分支. 我们可以选取 $t \in [0,1]$ 作为该分支的参数. 如果在参数 $t=0$ 处有 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t}>0$，那么沿整条参数曲线都有同样的情形. 不妨设在 $t=0$ 处有 $\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}t}>0$（相反的情形可类似地加以讨论）. 则在参数曲线的"0"端点，由 $(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"内向型"诱导定向；而在参数曲线"1"端点处，由（另一图卡的）$(\varphi^1, \cdots, \varphi^m)$ 给出的 ∂X 的局部坐标系属于"外向型"诱导定向. □

注记 2.2 引理 2.1 对以后的讨论有重要意义. 下面列出的关键事项(1)和(2)尤其值得注意（符号及假设条件均如引理 2.1）：

(1) 在点 $p \in Z \cap \partial X$ 邻近，对于所选择的坐标 $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1, \cdots, \varphi^m)$，约定记

$$\partial\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^m) \,|\, \partial X,$$

$$f = \partial F = F \,|\, \partial X, \quad \tilde{f} = \psi \circ f \circ (\partial\varphi)^{-1}.$$

则有（约定记 $\tilde{u} = (0, u^1, \cdots, u^m)$）

$$\tilde{f}(u^1, \cdots, u^m) = (\eta^1(\tilde{u}), \cdots, \eta^s(\tilde{u}), u^1, \cdots, u^m),$$

$$\pi'' \circ \tilde{f}(u^1, \cdots, u^m) = (u^1, \cdots, u^m).$$

于是，在 p 点计算 $\pi'' \circ \tilde{f}$ 的 Jacobi 行列式可得 $J(\pi'' \circ \tilde{f}) = 1$.

(2) 虽然 φ 是 X 的正向局部坐标，但 $\partial\varphi$ 的正向未必与 ∂X 的正向一致. 可以确认的事实是：在 $Z \cap \partial X$ 的各点，$\partial\varphi$ 的定向

恰好是 1 维流形 Z 定向的“补定向”. 注意到这一关键事实，在以后的讨论中，不论 ∂X 的正向怎样选择，我们都能参照具体情况，得出相应的结论.

一般约定 2.3 设 M 和 N 是定向光滑流形，S 是 N 的定向的正则子流形，并且

$$\dim M + \dim S = \dim N. \tag{2.1}$$

又设 $f\in C^{\infty}(M,N)$，$p\in f^{-1}(S)$，并且

$$f \pitchfork_p S. \tag{2.2}$$

选择 N 在 $q=f(p)$ 点邻近的关于 S 正则的正向局部坐标图卡 (Q,ψ)，要求 ψ 的前 s 个分量是 S 的正向局部坐标系. 我们约定把这样的 (Q,ψ) 称做“好”的局部坐标图卡.

设 π''：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^{n-s}$ 是从 $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^s\times\boldsymbol{R}^{n-s}$ 到后一因子空间 $\boldsymbol{R}^{n-s}$ 的标准投影. 由(2.1)和(2.2)可知：$\pi''\circ\psi\circ f$ 在 p 点邻近是局部光滑同胚. 因而可定义

$$\operatorname{Sgn}(\pi''\circ\psi\circ f)_{*,p}. \tag{2.3}$$

引理 2.4 (2.3)与“好”的局部坐标图卡 (Q,ψ) 的选取无关.

证明 设 ψ 和 ω 是 $q=f(p)$ 点邻近的两个好的局部坐标映射. 我们来考察坐标变换 $z=\omega\circ\psi^{-1}(y)$. 因为 ψ 和 ω 都是关于 S 正则的局部坐标系，所以 $z(y)=\omega\circ\psi^{-1}(y)$ 应使得

$$\begin{cases} z_{s+1}(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ z_{s+m}(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0)=0. \end{cases} \tag{2.4}$$

又因为 ψ 和 ω 都是 N 的正向的局部坐标映射，所以在 $(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})=(0,\cdots,0)$ 的地方有

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_s} & \frac{\partial z_1}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_{s+m}} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial z_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_s}{\partial y_s} & \frac{\partial z_s}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial z_s}{\partial y_{s+m}} \\
 & & & \frac{\partial z_{s+1}}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial z_{s+1}}{\partial y_{s+m}} \\
 & 0 & & \vdots & & \vdots \\
 & & & \frac{\partial z_{s+m}}{\partial y_{s+1}} & \cdots & \frac{\partial z_{s+m}}{\partial y_{s+m}}
\end{vmatrix} > 0.
$$

又因为$(y_1,\cdots,y_s)$与$(z_1,\cdots,z_s)$都是 S 的正向局部坐标，所以

$$
\frac{\partial(z_1,\cdots,z_s)}{\partial(y_1,\cdots,y_s)} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_s} \\
\vdots & & \vdots \\
\frac{\partial z_s}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_s}{\partial y_s}
\end{vmatrix} > 0.
$$

由上面两个关于行列式的不等式立即可得

$$
\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})} > 0. \tag{2.5}
$$

设 $p\in f^{-1}(S)$使得 $f \pitchfork_p S$. 为了比较 $\operatorname{Sgn}(\pi''\circ\psi\circ f)_{*,p}$ 和 $\operatorname{Sgn}(\pi''\circ\omega\circ f)_{*,p}$，我们选取 M 在 p 点邻近的正向局部坐标图卡(U,φ)，并记

$$
g = \psi\circ f\circ\varphi^{-1},\quad h = \omega\circ f\circ\varphi^{-1}.
$$

然后考察 $y=g(x)$与 $z=h(x)$之间的关系. 由(2.4)可知

$$
\frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j}(y_1,\cdots,y_s,0,\cdots,0) = 0 \quad (i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,s).
$$

因此

$$\frac{\partial z_{s+i}}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{s+m} \frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \sum_{j=s+1}^{s+m} \frac{\partial z_{s+i}}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k}.$$

由此得到

(2.6)

$$\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)} = \frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})} \cdot \frac{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}.$$

由(2.5)和(2.6)可知

$$\frac{\partial(z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)} \quad 与 \quad \frac{\partial(y_{s+1},\cdots,y_{s+m})}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}$$

的符号相同. 我们证明了:

$$\mathrm{Sgn}(\pi'' \circ \psi \circ f)_{*,p} = \mathrm{Sgn}(\pi'' \circ \omega \circ f)_{*,p}. \qquad \square$$

记号约定 2.5 我们约定把如上所述的 $\mathrm{Sgn}(\pi'' \circ \psi \circ f)_{*,p}$ 叫做 f 与 S 在 p 点的相交符号, 并简记为

$$\mathrm{Sgn}(f,S)_p.$$

定义 2.6 设 M 是紧致的定向光滑流形, N 是定向光滑流形, S 是 N 的定向的正则子流形, 并且 $\dim M + \dim S = \dim N$. 又设 $f: M \to N$ 是光滑映射, 适合条件

$$f \pitchfork S.$$

我们把 f 与 S 的相交数定义为

$$I(f,S) := \sum_{p \in f^{-1}(S)} \mathrm{Sgn}(f,S)_p.$$

对于 M 也是 N 的正则子流形(且与 S 横截)的特殊情形, 我们约定把 M 与 S 的相交数定义为

$$I(M,S) := I(i,S),$$

其中 $i: M \to N$ 是放入映射.

在下面的讨论中, 我们设 M 是紧致的定向光滑流形, N 是定向光滑流形, S 是 N 的闭的定向正则子流形, 并且

$$\dim M + \dim S = \dim N.$$

引理 2.7 设存在定向的紧致光滑带边流形 X 使得 $\partial X=M$,并且 $\partial X=M$ 的各连通分支赋有统一的诱导定向(或者都是"外向型"的,或者都是"内向型"的). 如果 $F\in C^{\infty}(X,N)$适合条件

$$F\pitchfork S,\quad \partial F\pitchfork S,$$

那么 $f=\partial F$ 与 S 的相交数是 0,即: $I(f,S)=0$.

证明 容易获知: $Z=F^{-1}(S)$是紧致的 1 维光滑流形,根据引理 2.1,在 Z 的每个同胚于$[0,1]$的连通分支的两个端点处,f 与 S 的相交符号恰好分别为$+1$ 和-1. 因此 $I(f,S)=0$.

□

引理 2.8 设 $f_i\in C^{\infty}(M,N)(i=1,2)$适合条件

$$f_1\pitchfork S,\quad f_2\pitchfork S.$$

如果 $f_1\sim f_2$(C^0 同伦),那么

$$I(f_1,S)=I(f_2,S).$$

证明 留给读者(可仿照第九章的引理 2.3 进行证明).

□

定义 2.9 设 M 是定向的紧致光滑流形,N 是定向的光滑流形,S 是 N 的闭的定向的正则子流形,并且 $\dim M+\dim S=\dim N$. 对于 $f\in C^0(M,N)$,我们选取 $f_1\in C^{\infty}(M,N)$满足这样的条件:

$$f_1\sim f,\quad f_1\pitchfork S,$$

然后定义

$$I(f,S):=I(f_1,S).$$

命题 2.10 定义 2.9 确当无歧义,并且所定义的 $I(f,S)$ 关于 f 的同伦是不变的.

§3 相交数定义的局部化

仿照第十章§1的讨论,我们来定义局部相交数.

一般约定 3.1 设 M 和 N 是定向光滑流形,S 是 N 的闭的定向的正则子流形,并且

$$\dim M + \dim S = \dim N.$$

设 Ω 是 M 的一个开子集,$\overline{\Omega}$ 是紧致集. 我们约定记 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \backslash \Omega$.

定义 3.2 如果 $f \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega) \cap S = \varnothing, \quad f \pitchfork_\Omega S,$$

那么 $\Omega \cap f^{-1}(S)$ 是紧致的 0 维流形(或者 $\varnothing$),因而是有限点集. 我们将 f 在 Ω 上与 S 的相交数定义为

$$I(f, \Omega, S) := \sum_{p \in \Omega \cap f^{-1}(S)} \operatorname{Sgn}(f, S)_p.$$

引理 3.3 设 M, N, S, Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 中所述,并设

$$f_i \in C^0(\overline{\Omega}, N) \cap C^\infty(\Omega, N) \quad (i = 0, 1)$$

适合条件

$$f_i(\partial\Omega) \cap S = \varnothing, \quad f_i \pitchfork_\Omega S, \quad i = 0, 1.$$

如果存在同伦 $H: f_0 \sim f_1$,使得

$$H(I \times \partial\Omega) \cap S = \varnothing,$$

那么

$$I(f_0, \Omega, S) = I(f_1, \Omega, S).$$

证明 可仿照第十章引理 1.3 作出本引理的证明(留作练习). □

引理 3.4 设 M, N, S, Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 中所述,并设 $f \in C^0(\overline{\Omega}, N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega) \cap S = \varnothing.$$

则存在 $f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 和 $H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$，使得

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega S$；

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$，$H(1,\cdot)=f(\cdot)$；

(3) $H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing$.

证明 将 N 光滑地嵌入到 $\boldsymbol{R}^k$ 之中. 约定将 $\boldsymbol{R}^k$ 的范数和距离函数分别记为 $\|\cdot\|$ 和 d. 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域，并设

$$\gamma:\Gamma\to N$$

是相应的管状投影（管状收缩映射）. 于是存在 $\varepsilon>0$，使得

$$\{y\in\boldsymbol{R}^k \,|\, d(y,f(\overline{\Omega}))<\varepsilon\}\subset\Gamma.$$

因为 $f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing$ 且 $f(\partial\Omega)\subset N$，所以 $f(\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(S)=\varnothing$. 因而存在 $\delta\in(0,\varepsilon)$，使得

$$d(f(\partial\Omega),\gamma^{-1}(S))>2\delta.$$

根据 Tietze 扩充定理，不妨设连续映射 $f:\overline{\Omega}\to N\subset\boldsymbol{R}^k$ 已扩充为 $f\in C^0(M,\boldsymbol{R}^k)$. 选取 f 的光滑逼近 $g\in C^\infty(M,\boldsymbol{R}^k)$，使得

$$g\pitchfork\gamma^{-1}(S),\quad \|g(x)-f(x)\|<\delta,\quad \forall x\in\overline{\Omega}.$$

然后定义

$$G:I\times\overline{\Omega}\to\boldsymbol{R}^k,$$
$$(t,x)\mapsto f(x)+(1-t)(g(x)-f(x)).$$

容易看到：

$$g(\overline{\Omega})\subset\Gamma,\quad G(I\times\overline{\Omega})\subset\Gamma,\quad G(I\times\partial\Omega)\cap\gamma^{-1}(S)=\varnothing.$$

我们取
$$f_0=\gamma\circ g,\quad H=\gamma\circ G.$$

则容易验证：这样定义的 f_0 和 H 能够满足引理的全部要求.

□

定义 3.5 设 M,N,S,Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 中所述，并设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 适合条件

$$f(\partial\Omega)\cap S=\varnothing.$$

我们选取 $f_0\in C^0(\overline{\Omega},N)\cap C^\infty(\Omega,N)$ 和 $H\in C^0(I\times\overline{\Omega},N)$，适合这样的要求：

(1) $f_0 \pitchfork_\Omega S$；

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot),H(1,\cdot)=f(\cdot)$；

(3) $H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing$.

然后，我们定义

$$I(f,\Omega,S):=I(f_0,\Omega,S).$$

命题 3.6(同伦不变性) 定义 3.5 确当无歧义，并且所定义的局部相交数具有如下所述的同伦不变性：如果存在

$$G\in C^0(I\times\overline{\Omega},N),$$

使得

(1) $G(0,\cdot)=f(\cdot),\ G(1,\cdot)=g(\cdot)$；

(2) $G(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing$，

那么
$$I(f,\Omega,S)=I(g,\Omega,S).$$

命题 3.7(区域可加性) 设 M,N,S,Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 所述. 设

$$\Omega_\lambda,\quad \lambda\in\Lambda$$

是含于 Ω 内的有限个两两不相交的开集. 设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$满足条件

$$f\Big(\overline{\Omega}\Big\backslash\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\Big)\Big)\cap S=\varnothing,$$

则有
$$I(f,\Omega,S)=\sum_{\lambda\in\Lambda}I(f,\Omega_\lambda,S).$$

证明 先将 N 光滑地嵌入到 $\boldsymbol{R}^k$ 中(约定将 $\boldsymbol{R}^k$ 的范数记为 $\|\cdot\|$，距离函数记为 $\mathrm{dist}(\cdot,\cdot)$). 设 Γ 是 N 在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的管状邻域，并设

$$\gamma: \Gamma \to N$$

是相应的管状投影. 于是,存在 $\varepsilon>0$,使得

$$\{q\in \boldsymbol{R}^k \mid \operatorname{dist}(q, f(\overline{\Omega})) < \varepsilon\} \subset \Gamma.$$

因为 $$f\left(\overline{\Omega}\Big\backslash\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\cap S = \varnothing,$$

所以 $$f\left(\overline{\Omega}\Big\backslash\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\cap \gamma^{-1}(S) = \varnothing.$$

设 $\delta\in\left(0,\frac{\varepsilon}{2}\right)$,使得

$$\operatorname{dist}\left[f\left(\overline{\Omega}\Big\backslash\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right), \gamma^{-1}(S)\right] > 2\delta.$$

不妨设连续映射 $f: \overline{\Omega}\to N\subset \boldsymbol{R}^k$ 已扩充为 $f\in C^0(M, \boldsymbol{R}^k)$. 取 f 的光滑逼近 $g\in C^\infty(M, \boldsymbol{R}^k)$,满足条件:

(1) $g \pitchfork \gamma^{-1}(S)$;

(2) $\|g(x)-f(x)\|<\delta$, $\forall x\in\overline{\Omega}$.

然后定义

$$G(t,x) = f(x) + (1-t)(g(x)-f(x)).$$

于是有

$$g\left(\overline{\Omega}\Big\backslash\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\cap \gamma^{-1}(S) = \varnothing,$$

$$G\left(I\times\left(\overline{\Omega}\Big\backslash\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\right)\cap \gamma^{-1}(S) = \varnothing.$$

我们记 $$f_0 = \gamma\circ g,\quad H = \gamma\circ G.$$

则 f_0 和 H 满足条件:

(1) $f_0 \pitchfork S$;

(2) $H(0,\cdot)=f_0(\cdot)$, $H(1,\cdot)=f(\cdot)$;

(3) $H\left(I\times\left(\overline{\Omega}\setminus\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Omega_\lambda\right)\right)\right)\cap S=\varnothing.$

由(3)可得

$$H(I\times\partial\Omega)\cap S=\varnothing;$$
$$H(I\times\partial\Omega_\lambda)\cap S=\varnothing,\quad \forall\lambda\in\Lambda.$$

另外，显然有

$$\Omega\cap f_0^{-1}(S)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\Omega_\lambda\cap f_0^{-1}(S)).$$

因而

$$\begin{aligned}I(f,\Omega,S)&=I(f_0,\Omega,S)\\&=\sum_{p\in\Omega\cap f_0^{-1}(S)}\mathrm{Sgn}(f_0,S)_p\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{p\in\Omega_\lambda\cap f_0^{-1}(S)}\mathrm{Sgn}(f_0,S)_p\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}I(f_0,\Omega_\lambda,S)\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}I(f,\Omega_\lambda,S).\end{aligned}$$

□

推论 3.8（切除性质） 设 M,N,S,Ω 和 $\partial\Omega$ 如一般约定 3.1 所述，K 是含于 Ω 之中的紧致集，并设 $f\in C^0(\overline{\Omega},N)$ 满足条件

$$f(K\cup\partial\Omega)\cap S=\varnothing.$$

则有

$$I(f,\Omega,S)=I(f,\Omega\setminus K,S).$$

证明 在命题 3.7 中取 $\Lambda=\{1\}$ 并取 $\Omega_1=\Omega\setminus K$ 即得.

□

§4 向量丛截面的光滑化与横截逼近

设 $(E,M,\pi,\mathbf{R}^k)$ 是一个光滑向量丛，$\sigma: M\to E$ 是一个连续截面. 将 σ 看成连续映射当然可以引用映射的光滑化定理. 但

这样得到的光滑映射 $\widetilde{\sigma}$ 不一定仍是截面，即不一定满足条件

$$\pi \circ \widetilde{\sigma} = \mathrm{id}.$$

（横截逼近定理应用于截面情形也会产生类似的问题.）我们有必要适当地修改映射的光滑化定理（横截逼近定理），使得修改后的定理能适用于截面的情形.

定理 4.1 设$(E,M,\pi,\boldsymbol{R}^k)$是光滑的向量丛，在其上取定了一个 Riemann 度量；$\sigma: M\to E$ 是一个连续截面；ε 是正实数. 则存在光滑截面 $\sigma_0: M\to E$，使得

$$\|\sigma_0(x) - \sigma(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x\in M.$$

这里$\|\cdot\|$是由 Riemann 度量决定的范数.

证明 局部看来，σ 可以表示成$(x,s(x))$. 我们可以用光滑的 $s_0(x)$逼近 $s(x)$. 于是，在局部范围内，截面$(x,s(x))$可以被光滑截面$(x,s_0(x))$任意逼近.

仿照"映射的光滑化定理"证明中从局部过渡到全局的做法，就可以顺利地完成本定理的证明. □

对于光滑向量丛$(E,M,\pi,\boldsymbol{R}^k)$，我们以 E_0 表示其零截面子流形.

定理 4.2 设 M 是光滑流形，$E=TM$ 是 M 的切丛，$\sigma: M\to E$ 是光滑截面，ε 是正实数. 则存在光滑截面 σ_1，使得

$$\sigma_1 \pitchfork E_0; \quad \|\sigma_1(x) - \sigma(x)\| < \varepsilon, \quad \forall x\in M,$$

这里$\|\cdot\|$是由 TM 的 Riemann 度量决定的范数.

证明 设 U 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，$\xi(x)$是定义于 U 上的光滑向量场，则$(x,\xi(x))$与 $TU=U\times\boldsymbol{R}^m$ 的零截面横截的充分必要条件是：$\xi(x)$ 以 $0\in\boldsymbol{R}^m$ 为正则值. 对于给定的光滑截面$(x,s(x))$，我们可以选取 $s(x)$的足够小的正则值 c，然后构造

$$s_1(x) = s(x) - c.$$

因为 0 是 $s_1(x)$的正则值，所以$(x,s_1(x))$与 $TU=U\times\boldsymbol{R}^m$ 的零

截面 $U\times 0$ 横截.

在以上局部结果的基础上，仿照“横截逼近定理”证明中从局部过渡到全局的作法，就可完成本定理的证明. □

在结束本节之前，我们还要指出：对于 $r\geqslant 2$，任何一个 C^r 流形 M 的切丛流形 TM，作为流形都是可定向的.

设 M 是 C^r 流形($r\geqslant 2$). 则 M 的任意两个相容的局部坐标图卡(U,φ)和(V,ψ)分别对应着切丛流形 TM 的局部坐标图卡

$$(T_UM,\Phi) \quad 和 \quad (T_VM,\Psi).$$

这里

$$\begin{aligned}\Phi: T_UM &\to \varphi(U)\times \boldsymbol{R}^m,\\ \xi &\mapsto (\varphi(\pi\xi),\varphi_*(\xi));\\ \Psi: T_VM &\to \psi(V)\times \boldsymbol{R}^m,\\ \eta &\mapsto (\psi(\pi\eta),\psi_*(\eta)).\end{aligned}$$

如果 $U\cap V\neq\varnothing$，那么切丛流形的局部坐标之间的变换为

$$(y,v)=\Psi\circ\Phi^{-1}(x,u)=(\psi\circ\varphi^{-1}(x),(\psi\circ\varphi^{-1})_*(u)).$$

计算这变换的 Jacobi 行列式可得

$$\begin{vmatrix}\left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}\right) & 0\\ * & \left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\end{vmatrix}=\left(\det\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)\right)^2>0.$$

由此得知：切丛流形 TM 总是可定向的. **这里特别要提请注意**：切丛 TM 作为一个流形的定向与它作为向量丛的定向是不同的概念，希望不要误解.

§5 向量场孤立零点的指标

设 G 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，则 $TG=G\times\boldsymbol{R}^m$. 定义于 G 上的 C^r 向

量场(即 TG 的 C^s 截面)具有这样的形式

$$(x,V(x)),\quad x\in G,$$

其中的 $V: G\to \boldsymbol{R}^m$ 是 C^s 映射. 对这种情形,通常就说: V 是定义于 G 上的 C^s 向量场.

设 p 是 V 的一个孤立零点,即 $V(p)=0$ 且存在 p 点的一个开邻域 U,使得

$$V(q)\neq 0,\quad \forall q\in U\backslash\{p\}.$$

取以 p 点为中心,$\varepsilon>0$ 为半径的一个小球面 $S_{p,\varepsilon}$,使得

(5.1) $$S_{p,\varepsilon}\subset U,$$

则可讨论 $V|S_{p,\varepsilon}$ 对 $0\in\boldsymbol{R}^m$ 的环绕数

(5.2) $$W(V|S_{p,\varepsilon},0).$$

下面的引理指出:(5.2)实际上不依赖于小正数 ε 的选取.

引理 5.1 设 $\varepsilon'>\varepsilon>0$ 并且 ε' 和 ε 都满足(5.1)的要求,则

$$W(V|S_{p,\varepsilon'},0)=W(V|S_{p,\varepsilon},0).$$

证明 约定将 $\boldsymbol{R}^m$ 中以 p 点为中心,ε 为半径的闭实心球体记为 $D_{p,\varepsilon}$. 因为 V 在紧致集 $X=D_{p,\varepsilon'}\backslash\mathrm{int}D_{p,\varepsilon}$ 上没有零点,所以存在 $\delta>0$,使得

(5.3) $$\|V(x)\|>2\delta,\quad \forall x\in X.$$

我们可以选取光滑向量场 $\widetilde{V}$,使得

(5.4) $$\|\widetilde{V}(x)-V(x)\|<\delta,\quad \forall x\in X.$$

因为 $\widetilde{V}$ 在 X 上不取零值,所以 $W(\widetilde{V}|\partial X,0)=0$. 由此得到

(5.5) $$W(\widetilde{V}|S_{p,\varepsilon'},0)=W(\widetilde{V}|S_{p,\varepsilon},0).$$

我们记

$$H(t,x)=V(x)+t(\widetilde{V}(x)-V(x)),$$

则由(5.3)和(5.4)可知

$$H(t,x)\neq 0,\quad \forall t\in I,\ x\in X;$$

并且显然有

$$H(0,\cdot)=V(\cdot),\quad H(1,\cdot)=\widetilde{V}(\cdot).$$

因而由(5.5)就可得到引理的结论. □

有了引理 5.1,对最简单的情形已经可以定义向量场孤立零点的指标.

定义 5.2 设 G 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集,V 是定义于 G 上的连续向量场,$p\in G$ 是 V 的孤立零点. 取足够小的 $\varepsilon>0$,使得闭球体 $D_{p,\varepsilon}\subset G$ 并且 V 在 $D_{p,\varepsilon}$上除 p 而外别无零点. 我们将 V 在 p 点的指标定义为

$$\mathrm{ind}_p V := W(V|S_{p,\varepsilon},0).$$

下面的任务是:对于定向光滑流形 M 上的向量场,定义其关于孤立零点的指标.

设 M 是一个定向光滑流形,σ 是 M 上的一个 C^s 向量场 $(s\geqslant 0)$,$p\in M$ 是 σ 的一个孤立零点. 于是,$\sigma(p)=0$,并且存在 p 点的一个开邻域 Ω,使得

$$\sigma(q)\neq 0,\quad \forall q\in\overline{\Omega}\setminus\{p\}.$$

必要时适当缩小 Ω,不妨设 $\overline{\Omega}$包含在 M 的一个局部坐标域 U 之中并且 $\overline{\Omega}$是紧致集. 设 φ是定义于 U 的正向局部坐标映射,并设

$$\Phi: T_U M\to\varphi(U)\times\boldsymbol{R}^m$$

是由 φ诱导的切丛 TM 的局部平凡化映射. 则(参看图 29)向量场 σ 可局部表示为:

$$\Phi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}(x)=(x,V(x)).$$

不失一般性,可设 $\varphi(p)=0$. 因为 $V(x)$在 $\varphi(\overline{\Omega})$中以 $\varphi(p)=0$ 为惟一零点,所以可定义关于该孤立零点的指标 $\mathrm{ind}_0 V(x)$.

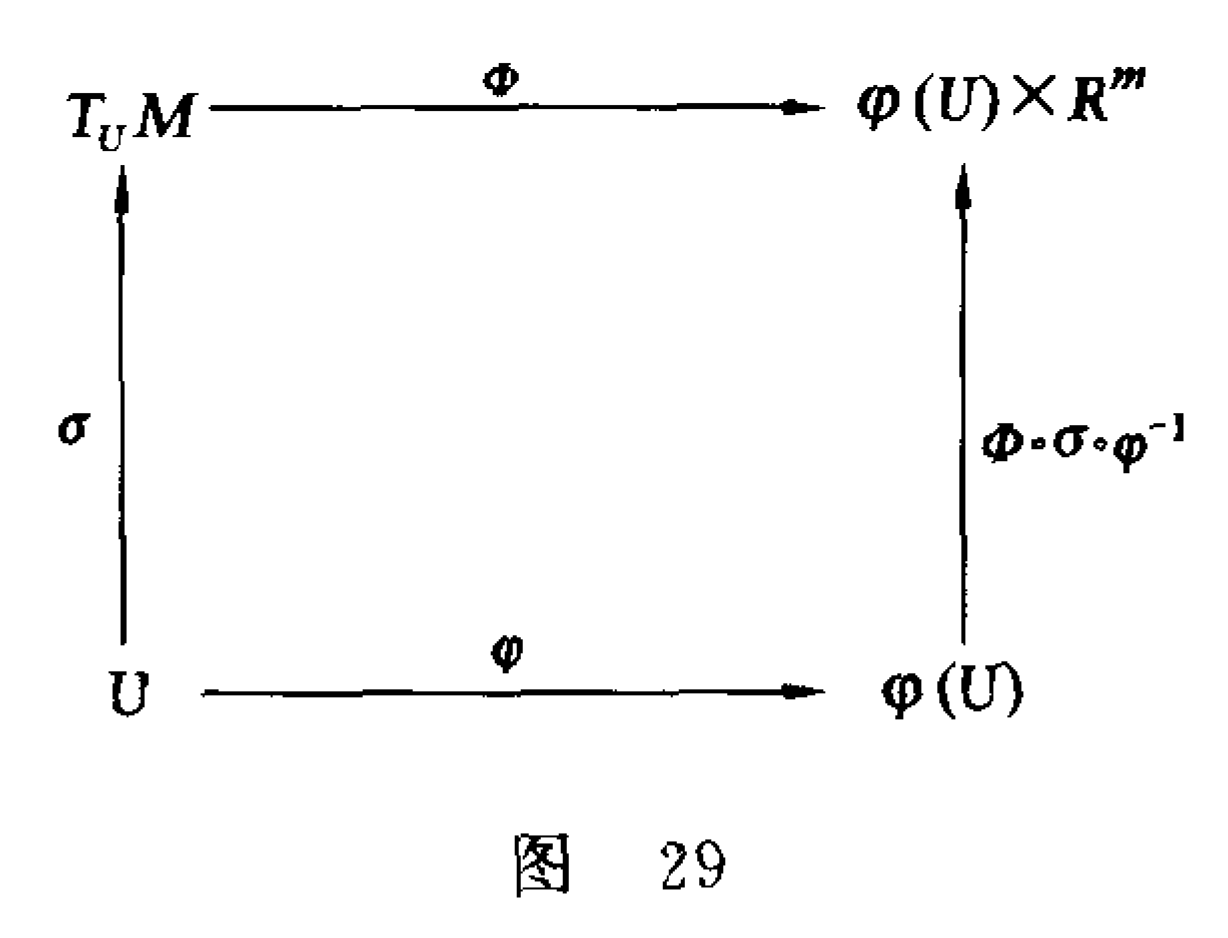


图 29

引理 5.3 上面所述的 $\text{ind}_0 V$ 实际上与符合定向要求的局部坐标 φ 的选取无关.

证明 首先指出一个很容易验证的公式：设 Δ 是 M 的开集，$\psi:\Delta\to D=\psi(\Delta)$ 是保持定向的光滑同胚，则有

(5.6) $\deg(f,\Delta,q)=\deg(f\circ\psi^{-1},\psi(\Delta),q)$ （参看图 30）.

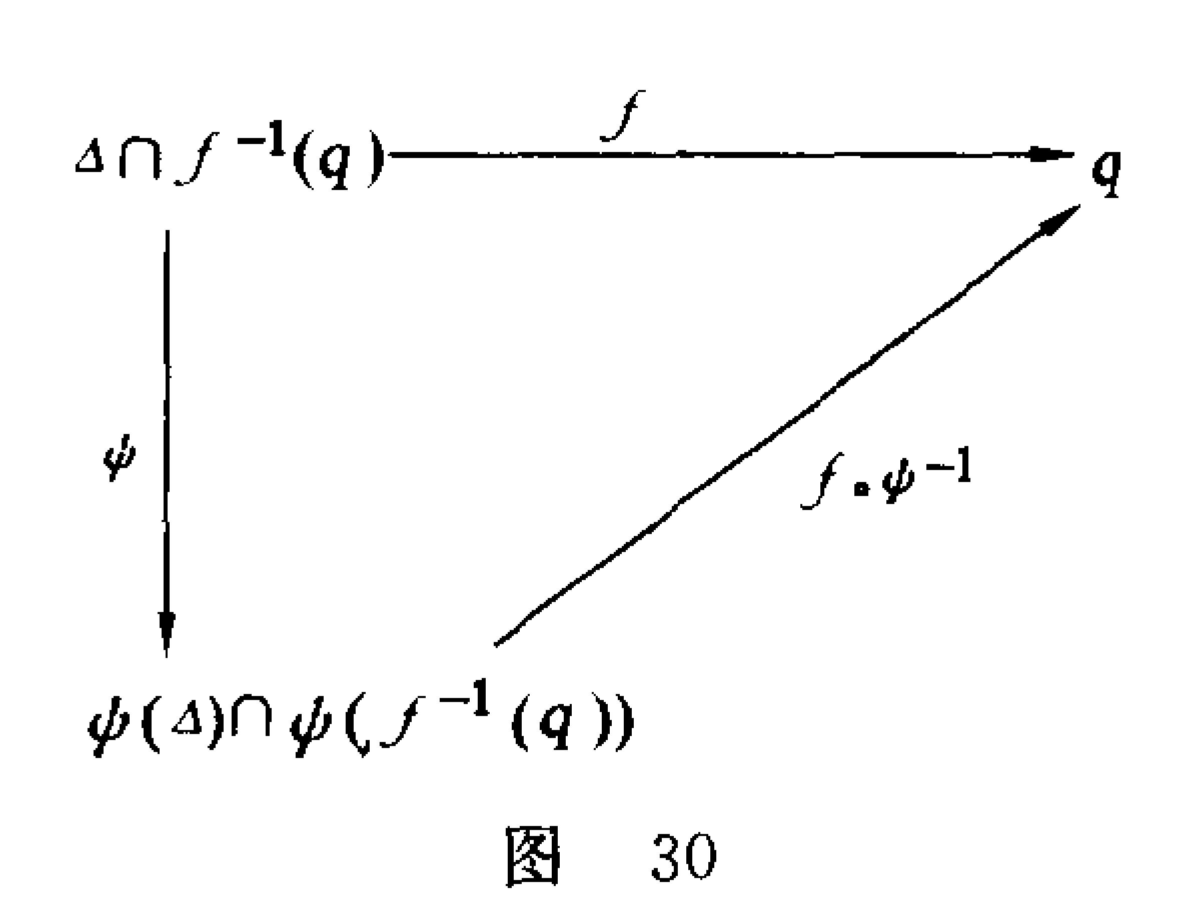


图 30

下面，我们来证明引理. 设 (U,φ) 是 p 点邻近的一个正向局部坐标图卡，适合条件 $\varphi(p)=0$. 设 Ω 是 p 点的一个开邻域，$\overline{\Omega}\subset U$，$\overline{\Omega}$ 是紧致集，并且

$$\sigma(q)\neq 0,\quad \forall q\in\overline{\Omega}\setminus\{p\}.$$

于是可取足够小的 $\varepsilon>0$，使 m 维闭球体 $D_\varepsilon=D_{0,\varepsilon}\subset\varphi(\Omega)$. 对于紧致集 $K=\overline{\Omega}\setminus\varphi^{-1}(\text{int}\,D_\varepsilon)$，存在 $\delta>0$，使得

$$\|\sigma(q)\|>2\delta,\quad \forall q\in K.$$

选取逼近 σ 的光滑截面 σ_1，使得

(1) $\sigma_1 \pitchfork E_0$（TM 的零截面）；

(2) $\|\sigma_1(q)-\sigma(q)\|<\delta,\ \forall q\in K$.

我们定义

$$H(t,x)=\sigma(x)+t(\sigma_1(x)-\sigma(x)),$$

则显然 $H: I\times M\to TM$ 是从 σ 到 σ_1 的同伦，并且

$$H(I\times K)\cap E_0=\varnothing.$$

设 σ 和 σ_1 分别局部表示成 $(x,V(x))$ 和 $(x,V_1(x))$，并设 $S_\varepsilon=\partial D_\varepsilon$，则有（推导中对于 $\Delta=\varphi^{-1}(D_\varepsilon)$ 和 $D=D_\varepsilon$ 用到公式(5.6)）

$$\begin{aligned}
\mathrm{ind}_0 V &= W(V|S_\varepsilon,0)=W(V_1|S_\varepsilon,0)=\deg(V_1,D_\varepsilon,0)\\
&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1\circ\varphi^{-1},D_\varepsilon,0)\\
&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1,\varphi^{-1}(D_\varepsilon),0)\\
&=\deg(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1,\Omega,0)\\
&=\sum_{\substack{\sigma_1(z)=0\\ z\in\Omega}}\mathrm{Sgn}(\pi''\circ\Phi\circ\sigma_1)_{*,z}\\
&=\sum_{\substack{\sigma_1(z)=0\\ z\in\Omega}}\mathrm{Sgn}(\sigma_1,E_0)_z\\
&=I(\sigma_1,\Omega,E_0)\\
&=I(\sigma,\Omega,E_0).
\end{aligned}$$

最后一个量显然与符合定向要求的局部坐标的选取无关. □

定义 5.4 设 M 是一个定向光滑流形，σ 是 M 上的 C^0 向量场（即 TM 的 C^0 截面），$p\in M$ 是 σ 的孤立零点. 任取 M 在 p 点邻近的正向局部坐标图卡 (U,φ)，不妨设 $\varphi(p)=0$. 将 φ 所诱导的切丛 TM 的局部平凡化映射记为 Φ. 则 σ 局部表示为

$$\Phi\circ\sigma\circ\varphi^{-1}(x)=(x,V(x)),$$

其中 $V: U\to \boldsymbol{R}^m$ 是连续映射. 我们定义

$$\mathrm{ind}_p\sigma := \mathrm{ind}_0 V.$$

§6 Poincaré-Hopf 定理

定义 6.1 设 M 是紧致的定向光滑流形，E_0 是切丛 TM 的零截面子流形. 我们约定把

$$\chi(M) := I(E_0, E_0)$$

叫做流形 M 的 **Euler 示性数**.

定理 6.2 设 M 是一个紧致的定向光滑流形，E_0 是切丛 TM 的零截面子流形，σ 是 M 上的一个横截于 E_0 的光滑向量场(即 TM 的一个与 E_0 横截的 C^∞ 截面)，并设 $p_1, \cdots, p_k$ 是 σ 的零点(当然都是孤立的)，则

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \chi(M).$$

证明 取各孤立零点 p_i 的足够小的开邻域 Ω_i，满足上节所述的要求. 不妨设所选取的 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ 两两不相交. 在引理 5.3中已经证明 $\operatorname{ind}_{p_i} \sigma = I(\sigma, \Omega_i, E_0)$. 因而

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \sum_{i=1}^{k} I(\sigma, \Omega_i, E_0) = I(\sigma, E_0).$$

切丛 TM 的任意两个截面 σ 与 τ 之间可定义同伦

$$H(t,x) = (1-t)\sigma(x) + t\tau(x).$$

特别地，σ 同伦于零截面. 因此 $I(\sigma, E_0) = I(E_0, E_0) = \chi(M)$. 这样，我们证明了

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \chi(M). \qquad \square$$

对于只有孤立零点的连续向量场也有类似的结果.

定理 6.3(Poincaré-Hopf 定理) 设 M 是紧致的定向光滑流形，σ 是 M 上连续的只有孤立零点的切向量场，$p_1, \cdots, p_k$ 是 σ 的所有的孤立零点，则

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma = \chi(M).$$

证明 取 p_i 的开邻域 Ω_i，使得 σ 在 Ω_i 中除了 p_i 之外别无零点($i=1,\cdots,k$). 我们记

$$K = M \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i. \tag{6.1}$$

因为 σ 在 K 上没有零点，所以存在 $\delta>0$，使得

$$\|\sigma(x)\| \geqslant 2\delta, \quad \forall x \in K. \tag{6.2}$$

设 E_0 是切丛 $E=TM$ 的零截面子流形. 选取切丛 E 的横截于 E_0 的光滑截面 $\tilde{\sigma}$，使得

$$\|\tilde{\sigma}(x) - \sigma(x)\| < \delta, \quad \forall x \in K. \tag{6.3}$$

值得注意的是：虽然 σ 在 Ω_i 中恰有一个零点 p_i，其光滑逼近 $\tilde{\sigma}$ 在 Ω_i 中却可能会有较多的零点，也可能会没有一个零点.（形象的说法是：σ 的孤立零点经过"扰动"之后可能会"分裂"成几个零点，也可能会"消失".）但据(6.2)和(6.3)可知，从 σ 到 $\tilde{\sigma}$ 的同伦

$$H(t,x) = \sigma(x) + t(\tilde{\sigma}(x) - \sigma(x))$$

适合条件 $H(I\times\partial\Omega_i)\cap E_0=\varnothing$. 因而

$$\operatorname{ind}_{p_i} \sigma = I(\sigma,\Omega_i,E_0) = I(\tilde{\sigma},\Omega_i,E_0). \tag{6.4}$$

对(6.4)式求和并注意 $\tilde{\sigma}$ 在 $M\Big\backslash \bigcup_{i=1}^{k}\Omega_i$ 没有零点，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}_{p_i} \sigma &= \sum_{i=1}^{k} I(\tilde{\sigma},\Omega_i,E_0) \\ &= I(\tilde{\sigma},E_0) = I(E_0,E_0) = \chi(M). \qquad \square\end{aligned}$$

由上面的讨论我们获悉：在所述条件下，流形 M 的任何只有孤立零点的切向量场，其零点的指标之和是一个由 M 决定的不变量.

下一步的任务是：说明我们这里所定义的 Euler 示性数与

组合拓扑学中用其他方法定义的"Euler 示性数"其实是同一个东西.

引理 6.4 设 $\rho_i : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 是由下式定义的映射

$$\rho_i(x^1,\cdots,x^{i-1},x^i,x^{i+1},\cdots,x^n) = (x^1,\cdots,x^{i-1},-x^i,x^{i+1},\cdots,x^n),$$

则 $f_i=\rho_i|S^{n-1}$的映射度为-1,即

$$\deg(f_i) = -1.$$

证明 以 $f_1=\rho_1|S^{n-1}$为例写出证明. 点$(-1,0,\cdots,0)$是光滑映射 f_1 的正则值,惟一的原像点是$(1,0,\cdots,0)$. 若在这两点邻近以$(x^2,\cdots,x^n)$为局部坐标,即以向相应坐标面的投影作为局部坐标映射,则 f_1 的局部表示是该坐标平面上的恒同映射. 依照 S^{n-1}的外法线诱导定向,在点$(1,0,\cdots,0)$处,坐标$(x^2,\cdots,x^n)$是正向的;而在点$(-1,0,\cdots,0)$处,坐标$(x^2,\cdots,x^n)$是负向的. 若在后一点邻近将坐标换成正向的局部坐标,则 f_1 的局部表示 $\widetilde{f}_1$ 的 Jacobi 行列式改变成负值,因而

$$\deg(f_1) = -1. \qquad \square$$

引理 6.5 设映射 $\Gamma : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 定义为

$$\Gamma = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \cdots \circ \rho_1,$$

其中的 ρ_i 是如引理 6.4 中所述的映射. 则对于 $\varepsilon\in(0,1]$有

$$W(\Gamma|S_\varepsilon^{n-1},0) = (-1)^k.$$

证明 因为 Γ 在 $D_1\backslash(\operatorname{int} D_\varepsilon)$中不取 0 值,所以

$$W(\Gamma|S_\varepsilon^{n-1},0) = W(\Gamma|S_1^{n-1},0).$$

我们记

$$f = \Gamma|S_1^{n-1} : S_1^{n-1} \to S_1^{n-1}.$$

因为
$$f = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1,$$

其中 $$f_i = \rho_i \big| S_1^{n-1}, \quad i = 1,\cdots,k.$$

所以

$$W(\Gamma \big| S_\varepsilon^{n-1}, 0) = W(\Gamma \big| S_1^{n-1}, 0) = \deg(f) = (-1)^k. \quad \square$$

引理 6.6 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中原点 0 的一个开邻域，V 和 Γ 是定义于 Ω 上的以原点 0 为孤立零点的 C^0 向量场. 如果

$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|} \neq -\frac{\Gamma(x)}{\|\Gamma(x)\|}, \quad \forall x \in \Omega \backslash \{0\},$$

那么 $$\mathrm{ind}_0 V = \mathrm{ind}_0 \Gamma.$$

特别地，考察这样一个向量场

$$\Gamma_k(x) = \rho_k \circ \rho_{k-1} \circ \cdots \circ \rho_1(x),$$

其中 $\rho_i(i=1,\cdots,k)$如引理 6.4 所述. 如果

$$\frac{V(x)}{\|V(x)\|} \neq -\frac{\Gamma_k(x)}{\|\Gamma_k(x)\|}, \quad \forall x \in \Omega \backslash \{0\},$$

那么 $$\mathrm{ind}_0 V = (-1)^k.$$

证明 取足够小的 $\varepsilon>0$，使得 V 和 Γ 在 $D_\varepsilon \backslash 0$ 中无零点. 在 S_ε 上，我们定义

$$f(x) = \frac{V(x)}{\|V(x)\|}, \quad g(x) = \frac{\Gamma(x)}{\|\Gamma(x)\|}.$$

则有

$$\mathrm{ind}_0 V = W(V \big| S_\varepsilon, 0) = \deg(f),$$

$$\mathrm{ind}_0 \Gamma = W(\Gamma \big| S_\varepsilon, 0) = \deg(g).$$

因为 $f, g: S_\varepsilon \to S_1$ 适合条件

$$f(x) \neq -g(x), \quad \forall x \in S_\varepsilon,$$

所以 f 与 g 同伦. 由此得知

$$\mathrm{ind}_0 V = \deg(f) = \deg(g) = \mathrm{ind}_0 \Gamma. \quad \square$$

在前面的讨论中，对于紧致的定向光滑流形 M，我们将其 Euler 示性数 $\chi(M)$定义为切丛 TM 的零截面 E_0 的自相交数：

$$\chi(M) = I(E_0, E_0).$$

定理 6.3 指出，切丛 TM 的任何一个只有孤立零点的 C^0 截面，其所有的零点的指标之和恰好等于 $\chi(M)=I(E_0,E_0)$. 下面，我们将具体地构造一个只有孤立零点的切向量场，该向量场的所有的零点的指标之和正好与组合拓扑学中借助于单纯剖分所定义的"Euler 示性数"相等. 这样也就证明了从不同的角度作出的 Euler 示性数的两种定义实际上是一致的.

为此，首先需要介绍下面的定义 6.7.

对于(有限)单纯复合形 K，约定将相应的多面体记为$[K]$.

定义 6.7 设 M 是紧致光滑流形，K 是一个(有限)单纯复合形，$h:[K]\to M$ 是连续映射. 我们称(K,h)是 M 的一个光滑的单纯剖分，倘若

(1) $h:[K]\to M$ 是 C^0 同胚；

(2) 对 K 的每个单形 σ，都有$[\sigma]$所在"平面"(即仿射子空间)上的开集 $U\supset[\sigma]$，使得 $h\big|[\sigma]:[\sigma]\to M$ 可以扩充为从 U 到 M 的 C^∞ 嵌入.(以下将这样的开集记为 U_σ.)

我们需要引用一个重要定理：

定理 6.8 任何紧致的光滑流形都具有光滑的单纯剖分.

这一定理的证明过程比较长，涉及的技术细节比较多. 有兴趣了解这定理证明的读者可以参看 Muncres 著，李培信译的《初等微分拓扑学》一书的第二章.

设紧致的定向光滑流形 M 已光滑地剖分为单纯复合形：$M=h([K])$. 我们将首先在 K 的各单形体$[\sigma]$上定义向量场，然后借助于嵌入映射 h，将$[\sigma]$上的向量场移入 TM，这样作成 M 上的向量场.

(1) 首先，在 K 的 0 维骨架 K^0 上(即全体顶点的集合上)规定向量场取 0 值：

$$V(x) = 0, \quad \forall x\in K^0.$$

(2) 假设在 K 的 s 维单形 Δ^s 的边界 $\partial\Delta^s$ 上已经定义好了 $V(x)$. 设 c 是 Δ^s 的重心，π 是以 c 点为中心将 $\Delta^s\backslash\{c\}$ 投射到 $\partial\Delta^s$ 的中心投影映射，$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是单形 Δ^s 上的重心坐标. 约定记

$$\eta(x)=(s+1)^{s+1}\lambda_0(x)\lambda_1(x)\cdots\lambda_s(x).$$

对于 $x\in\Delta^s\backslash\{c\}$，我们定义

$$V(x)=(1-\eta(x))^2V(\pi x)+\eta(x)(c-x).$$

此外，还定义 $V(c)=0$.（请注意：在邻近 c 点处，如果我们将 $V(x)$ 表达式的前一项 $(1-\eta(x))^2V(\pi x)$ 与后一项 $\eta(x)(c-x)$ 作比较，前一项是更高阶的无穷小量.）

用上面所说的办法，我们在 $M=h([K])$ 上定义了一个 C^0 向量场. 该向量场的零点是 K 的各单形重心 c 的像点 $h(c)$，因而都是孤立的(参看图 31).

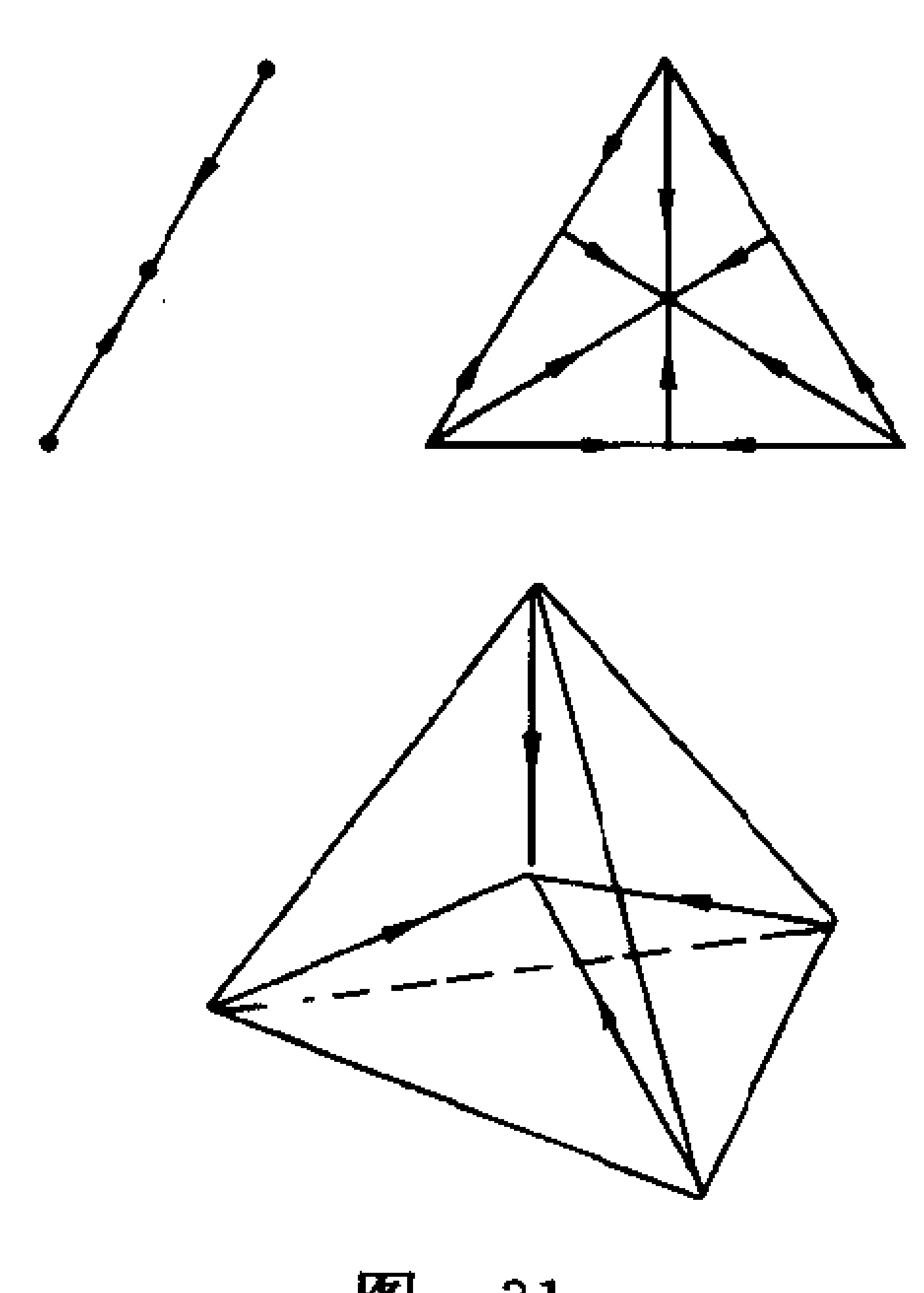


图 31

设 c 是 K 的某个 s 维单形 Δ^s 的重心. 在 c 点邻近，$V(x)$ 沿着 s 维方向趋向 c，沿着其余 $m-s$ 维方向远离 c. 根据引理 6.6 可知

$$\text{ind}_c V = (-1)^s.$$

如果将 K 的 s 维单形的总数记为 N_s，那么

$$I(E_0, E_0) = \sum \text{ind}_c V = \sum_{s=0}^{m} (-1)^s N_s.$$

上式右端最后一个和数正好就是组合拓扑学中借助于单纯剖分所定义的"Euler 示性数".

练 习 K

K.1. 仿照第九章引理 2.3 完成本章引理 2.8 的证明.

K.2. 仿照第十章引理 1.3 完成本章引理 3.3 的证明.

K.3. 试构造 S^n 的光滑切向量场 Γ，适合这样的条件：Γ 仅有两个零点 p 和 q，并且 $\text{ind}_p \Gamma = 1$，$\text{ind}_q \Gamma = (-1)^n$.

K.4. 试利用 Poincaré-Hopf 定理证明 $\chi(S^{2k-1}) = 0$，$\chi(S^{2k}) = 2$.

K.5. 试证 S^n 具有处处不为 0 的切向量场的充分必要条件是：$n = 2k-1$.

K.6. 设 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$（$n$ 个 S^1 的乘积流形），试证 $\chi(T^n) = 0$.

第十二章　映射度的积分表示与 Gauss-Bonnet 公式

作为本章的预备知识，需要了解外微分形式的积分与一般 Stokes 公式(请参看附录 δ). 我们约定以 $\Omega^k(M)$表示光滑流形 M 上的所有光滑的 k 次外微分形式组成的集合.

§1　映射度的积分表示

对于 $\omega\in\Omega^k(M)$，我们将 ω 的支集定义为

$$\operatorname{supp}\omega := \overline{\{x\in M \mid \omega\neq 0\}}.$$

若 $\operatorname{supp}\omega$ 是紧致的，则称 ω 为紧支(外微分)形式. $\Omega^k(M)$中由全体紧支形式组成的子集合记为 $\Omega^k_c(M)$.

引理 1.1　设 $\omega\in\Omega^n_c(\boldsymbol{R}^n)$满足条件

$$\int\omega = 0,$$

则存在 $\rho\in\Omega^{n-1}_c(\boldsymbol{R}^n)$，使得

$$\omega = \mathrm{d}\rho.$$

证明　用归纳法. 对于 $n=1$ 的情形，$\omega\in\Omega^1_c(\boldsymbol{R}^1)$可以表示成 $\omega=g(x)\mathrm{d}x$，其中 $g\in C^\infty_c(\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^1)$. 我们记

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\mathrm{d}x.$$

因为 $\int\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0$，所以 ρ 是紧支光滑函数，即 $\rho\in\Omega^0_c(\boldsymbol{R}^1)$. 显然有

$$\omega = g(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\rho.$$

假设对于 $n=m-1$ 的情形结论成立，考察 $n=m$ 的情形. 我们将 $\omega\in\Omega_c^m(\boldsymbol{R}^m)$ 写成

$$\omega = g(x',x_m)\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m,$$

这里

$$x' = (x_1,\cdots,x_{m-1}), \quad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m-1}.$$

然后定义

$$\widetilde{g}(x') = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x',x_m)\mathrm{d}x_m, \quad \widetilde{\omega} = \widetilde{g}(x')\mathrm{d}x'.$$

显然 $\widetilde{\omega}\in\Omega_c^{m-1}(\boldsymbol{R}^{m-1})$ 并且满足条件

$$\int\widetilde{\omega} = \int\widetilde{g}(x')\mathrm{d}x' = \int\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{+\infty} g(x',x_m)\mathrm{d}x_m = \int\omega = 0.$$

根据归纳法假设，存在 $\widetilde{\rho}\in\Omega_c^{m-2}(\boldsymbol{R}^{m-1})$，使得 $\widetilde{\omega}=\mathrm{d}\widetilde{\rho}$. 不妨将 $\widetilde{\rho}$ 写成

$$\widetilde{\rho} = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}\widetilde{h}_i(x')\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{m-1}$$

(其中 $\widehat{\mathrm{d}x_i}$ 表示不含 $\mathrm{d}x_i$). 于是

$$\widetilde{g}(x')\mathrm{d}x' = \widetilde{\omega} = \mathrm{d}\,\widetilde{\rho} = \left(\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\widetilde{h}_i}{\partial x_i}(x')\right)\mathrm{d}x'.$$

由此可知

$$\widetilde{g}(x') = \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial\widetilde{h}_i}{\partial x_i}(x').$$

我们取 $k\in C_c^\infty(\boldsymbol{R}^1,\boldsymbol{R}^1)$，使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t)\mathrm{d}t = 1.$$

然后记

$$h_m(x',x_m) = \int_{-\infty}^{x_m}[g(x',t) - \widetilde{g}(x')k(t)]\mathrm{d}t.$$

显然 h_m 是紧支光滑函数，并且

$$\frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x',x_m) = g(x',x_m) - \tilde{g}(x')k(x_m).$$

因而

$$\begin{aligned} g(x',x_m) &= \tilde{g}(x')k(x_m) + \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x',x_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \tilde{h}_i(x')}{\partial x_i} k(x_m) + \frac{\partial h_m}{\partial x_m}(x',x_m). \end{aligned}$$

若记

$$h_i(x',x_m) = \tilde{h}_i(x')k(x_m), \quad i = 1,\cdots,m-1,$$

则有
$$g(x',x_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i(x',x_m)}{\partial x_i}.$$

我们看到：

$$\begin{aligned} \omega &= g(x',x_m)\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial h_i(x',x_m)}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_m = \mathrm{d}\rho, \end{aligned}$$

其中

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} h_i(x) \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$$

是紧支的 $m-1$ 次外微分形式. □

约定 设 N 是光滑流形, $\dim N = n$. N 的开集 Q 被称为“标准”的坐标域, 倘若存在 N 的局部坐标 (Q,ψ), 使得

$$\psi(Q) = \boldsymbol{R}^n.$$

外微分形式 $\omega \in \Omega^k(N)$ 被称为紧支于 Q 中的形式. 倘若 $\mathrm{supp}\, \omega$ 是紧致集, 并且

$$\mathrm{supp}\, \omega \subset Q.$$

引理 1.2 设 M 是定向的紧致光滑(无边)流形, N 是定向的光滑流形, 并且 $\dim M = \dim N = n$. 又设 Q 是 N 的一个“标准”的坐标域, $\omega \in \Omega^n(N)$ 是紧支于 Q 中的外微分形式, 满足条

件

$$(1.1)\qquad \int_N \omega = 0.$$

则对任意的 $f\in C^{\infty}(M,N)$ 都有

$$\int_M f^* \omega = 0,$$

这里 $f^* \omega$ 的定义见附录 δ. 2. 4 .

证明 从条件(1. 1)可知,存在 $\rho\in \Omega_c^{n-1}(Q)$,使得

$$(1.2)\qquad \omega = \mathrm{d}\rho.$$

注意到 $\partial M=\varnothing$,由(1. 2)可得

$$\int_M f^* \omega = \int_M f^* \mathrm{d}\rho = \int_M \mathrm{d}(f^* \rho) = \int_{\partial M} f^* \rho = 0.$$

在上面的推导中,我们引用了一般的 Stokes 定理. □

推论 1. 3 关于 M,N,Q 和 f 的假定如引理 1. 2 中所述. 设 ω_1 和 ω_2 都是紧支于 Q 中的光滑的 n 次外微分形式. 如果

$$\int \omega_1 = \int \omega_2,$$

那么

$$\int f^* \omega_1 = \int f^* \omega_2.$$

约定 设 U 和 V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集. 我们约定以 $\mathrm{Diff}(U,V)$ 表示从 U 到 V 的所有的微分同胚组成的集合.

引理 1. 4 设 U 和 V 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集,ω 是紧支于 V 中的 n 次外微分形式. 则对任意的 $f\in \mathrm{Diff}(U,V)$ 都有

$$\int_U f^* \omega = (\operatorname{sgn} J_f)\int_V \omega,$$

这里 $\operatorname{sgn} J_f$ 是 f 的 Jacobi 行列式的符号.

证明 可设 $\omega=g(y)\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n$. 根据微分形式的变换法则与重积分的变换公式,我们算出:

$$\int_U f^* \omega = \int_U g(f(x))J_f(x)\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_U g(f(x))J_f(x)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= (\operatorname{sgn} J_f)\int_U g(f(x))\,|J_f(x)|\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= (\operatorname{sgn} J_f)\int_V g(y)\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$= (\operatorname{sgn} J_f)\int_V g(y)\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_n$$

$$= (\operatorname{sgn} J_f)\int_V \omega. \qquad \square$$

定理 1.5(映射度的积分表示) 设 M 是紧致的定向光滑流形,N 是连通的定向光滑流形,$\dim M=\dim N=n$. 又设 Q 是 N 的一个"标准"的局部坐标域,$\omega\in\Omega^n(N)$是紧支于 Q 中的形式,$f\in C^\infty(M,N)$,则有,

$$\int f^*\omega = \deg(f)\int\omega.$$

特别地,如果 ω 还满足条件 $\int\omega=1$, 那么就有

$$\deg(f) = \int f^*\omega.$$

证明 在 Q 中任取 f 的一个正则值 q. 根据"唱片引理",$f^{-1}(q)$是有限点集:

$$f^{-1}(q) = \{p_1,\cdots,p_k\},$$

并且存在 q 的开邻域 $V\subset Q$ 和 p_i 在 M 中的开邻域 $U_i(i=1,\cdots,k)$,使得

(1) $U_i\cap U_j=\varnothing$, $\forall i\neq j$;

(2) $f^{-1}(V)=U_1\cup\cdots\cup U_k$;

(3) $f|U_i: U_i\to V$ 是光滑同胚.

我们选取一个紧支于 V 中的形式 $\omega'\in\Omega^n(N)$. 必要时乘以适当常数,可设 ω'满足条件

$$\int \omega' = \int \omega.$$

于是(根据推论 1.3 和引理 1.4)有

$$\int f^* \omega = \int f^* \omega' = \sum_{i=1}^{k} \int_{U_i} (f|U_i)^* \omega'$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{Sgn}\, f_{*,p_i}) \int \omega'$$

$$= \deg(f) \int \omega' = \deg(f) \int \omega. \qquad \square$$

定理 1.6(积分变元替换的映射度公式) 设 M 是紧致的定向光滑流形，N 是连通的定向光滑流形，$\dim M = \dim N = n$，$f \in C^\infty(M,N)$，$\omega \in \Omega_c^n(N)$. 则有

$$\int f^* \omega = \deg(f) \int \omega.$$

证明 我们首先选取 N 的一族“标准”的局部坐标图卡 $\{(Q,\psi)\}$，使得 $\mathscr{Q} = \{Q\}$覆盖了 N. 然后选取从属于覆盖 $\mathscr{Q}$ 的一个单位分解($\{\mathrm{supp}\eta_\alpha\}$具有局部有限性)：

$$1 = \sum_\alpha \eta_\alpha(y).$$

我们将 ω 表示成

$$\omega = \sum_\alpha \eta_\alpha \omega = \sum_\alpha \omega_\alpha,$$

这里 $\omega_\alpha = \eta_\alpha \omega$ 是紧支于某个“标准”的局部坐标域中的形式. 根据定理 1.5，

$$\int f^* \omega_\alpha = \deg(f) \int \omega_\alpha.$$

因而有

$$\int f^* \omega = \sum_\alpha \int f^* \omega_\alpha = \sum_\alpha \deg(f) \int \omega_\alpha$$

$$= \deg(f) \sum_\alpha \int \omega_\alpha = \deg(f) \int \omega. \qquad \square$$

§ 2 Gauss-Bonnet 公式

赋有确定 Riemann 度量的光滑流形被称为光滑 Riemann 流形. 设 X 是定向的 n 维光滑 Riemann 流形. 在 X 的各个局部坐标域上，给定的 Riemann 度量（对称正定的二阶协变张量）表现为

(2.1) $$g_{ij} \quad (i,j=1,\cdots,n).$$

我们约定记

(2.2) $$g=\det(g_{ij}).$$

考察外微分形式

(2.3) $$\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

容易验证：由(2.3)所定义的形式不依赖于正向局部坐标系的选择（对正向局部坐标的变换具有不变性）. 我们把这样定义的形式称作 Riemann 流形 X 的**面积形式**（或称作**面积微元**）.

如同第十章 § 4 中所述，我们将 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的任何一个连通的 n 维光滑正则子流形 X 称为"$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的超曲面"，并且认为在 X 上赋有由 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的 Euclid 内积诱导的 Riemann 度量.

设 X 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致的超曲面. 则由 X 的外法线方向可以确定流形 X 的定向. 因而任何紧致的超曲面都是可定向的.

考察 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的两个紧致的超曲面 M 和 N. 设 M 和 N 的"正向"面积形式（即表示"正向"面积微元的 n 次外微分形式）分别是 A_M 和 A_N. 如果 $f: M\to N$ 是光滑映射. 那么 f^*A_N 是 M 上的一个光滑的 n 次外微分形式. 因为 $\Omega^n(M)$ 限制在各点都是 1 维线性空间，所以 f^*A_N 与 A_M 逐点相关：

(2.4) $$f^*A_N(x)=\lambda(x)A_M(x).$$

我们将(2.4)式中的系数 $\lambda(x)$ 定义为映射 f 在点 $x\in M$ 处的

Jacobian，记作

(2.5) $$J_f(x) := \lambda(x) \quad (x \in M).$$

设 M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个紧致的超曲面. 对于任意的 $x \in M$，可以确定 M 在 x 点的单位长外法线向量 $G(x)$，这样定义了一个映射 $G: M \to S^n$. 映射 G 被称为超曲面 M 的 **Gauss 映射**. 这个映射在 x 点的 Jacobian 被称为 M 在 x 点的 **Gauss 曲率**. 记为

(2.6) $$K(x) := J_G(x) \quad (x \in M).$$

关于偶数维超曲面 M 的 Gauss 曲率沿该超曲面的积分，有以下著名的定理.

Gauss-Bonnet 公式 设 n 是偶数，M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的一个紧致光滑超曲面，则有

$$\int_M K(x) A_M(x) = \frac{1}{2} \gamma_n \chi(M),$$

式中 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数，γ_n 是 n 维单位球面 S^n 的面积.

特别地，对于 $n=2$ 的情形，$\gamma_2 = 4\pi$. 因而对于 $\boldsymbol{R}^3$ 中的超曲面 M 有这样的公式：

$$\int_M K(x) A_M(x) = 2\pi \chi(M).$$

证明 为了叙述方便，我们将证明分成若干步骤.

(1) 根据 Gauss 曲率的定义

$$K(x) A_M(x) = J_G(x) A_M(x) = G^* A_{S^n}(x).$$

运用积分变元替换的映射度公式，我们得到

$$\int_M K(x) A_M(x) = \int_M J_G(x) A_M(x) = \int_M G^* A_{S^n}(x)$$
$$= \deg(G) \int_{S^n} A_{S^n} = \deg(G) \cdot \gamma_n.$$

于是，为了证明 Gauss-Bonnet 公式，只须证明

$$\deg(G) = \frac{1}{2}\chi(M).$$

为此目的，我们需要将 Gauss 映射(即单位法向量场)与适当的切向量场联系起来.

(2) 选取 $a \in S^n$，使得 a 是 G 与 $-G$ 共同的正则值. 于是 a 与 $-a$ 都是 G 的正则值. 我们在 M 上定义这样一个向量场：

$$V(x) = (-a) - ((-a) \cdot G(x))G(x)$$
$$= (a \cdot G(x))G(x) - a,$$

式中的圆黑点"·"表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$中的内积运算(请参看图 32).

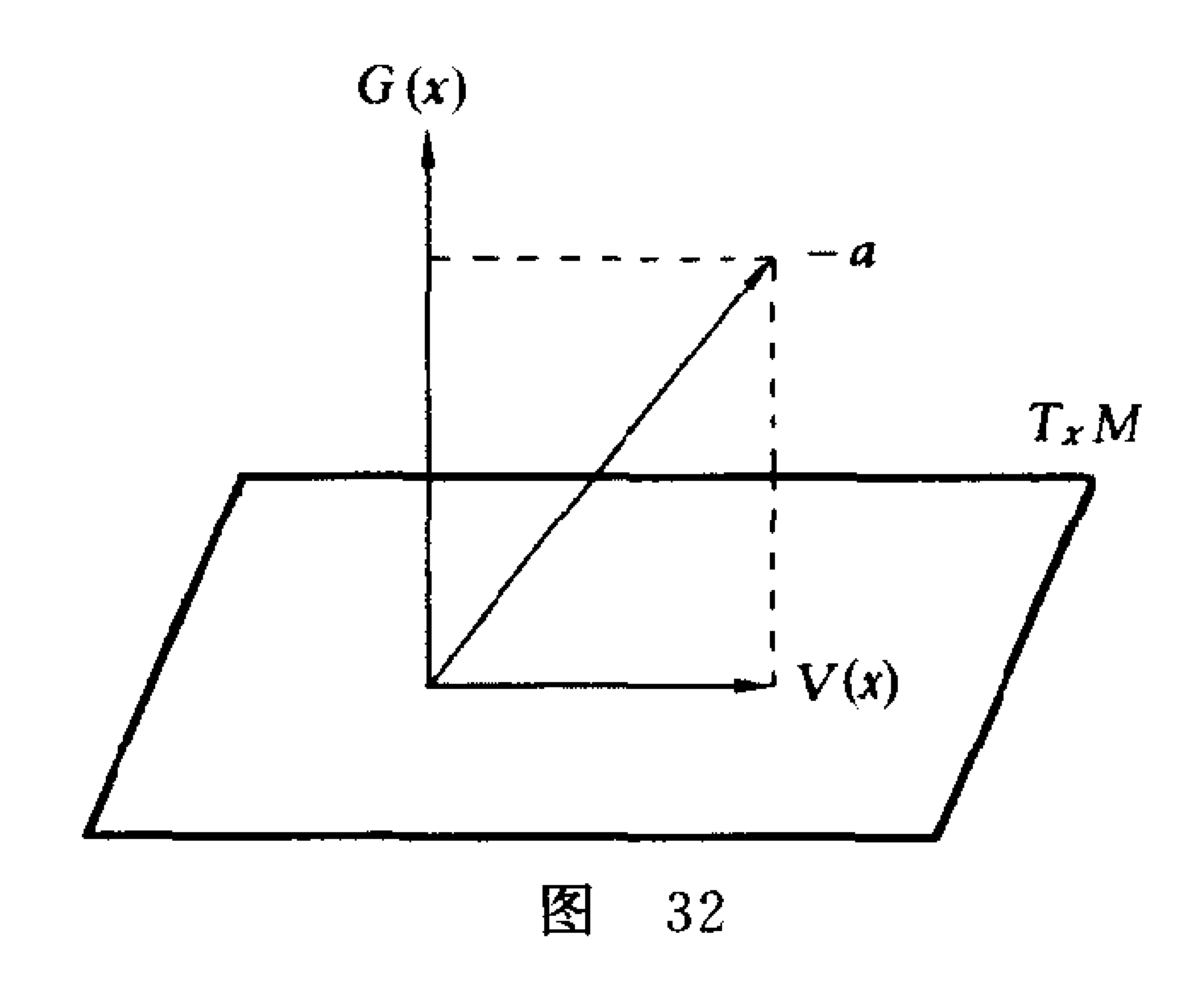


图 32

向量场 $V(x)$的零点就是使得 $G(x) = \pm a$ 的点 x. 因为$\pm a \in S^n$ 是 G 的正则值，所以 $V(x)$的所有的零点都是孤立的. 又因为 M 是紧致的，所以 $V(x)$的零点数目有限. 为了计算 $V(x)$ 在各零点处的指标，我们需要计算 $\mathrm{d}V(x)$.

(3) 我们写出 $V(x)$的表示式

$$V(x) = (a \cdot G(x))G(x) - a.$$

对这表示式作微分运算得到

$$\mathrm{d}V_x(\xi) = (a \cdot G(x))\mathrm{d}G_x(\xi) + (a \cdot \mathrm{d}G_x(\xi))G(x),$$

这里 $\xi \in T_xM$. 因为

$$G(x)\cdot G(x)=1,\quad \forall x\in M,$$

所以对任意的 $\xi\in T_xM$ 有

$$G(x)\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=0.$$

于是，在使得 $G(x)=\pm a$ 的点 x 处，应有

$$a\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=\pm G(x)\cdot \mathrm{d}G_x(\xi)=0.$$

因此，对于使得 $G(x)=\pm a$ 的点 x 有

$$\mathrm{d}V_x=\begin{cases}\mathrm{d}G_x, & 若\ G(x)=a,\\ -\mathrm{d}G_x, & 若\ G(x)=-a.\end{cases}$$

又因为 $\dim M=n$ 是偶数，所以

$$\mathrm{Sgn}\,(-G)_{*,x}=\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}.$$

因而对于 $G(x)=a$ 和 $G(x)=-a$ 这两种情形都有

$$\mathrm{Sgn}\,V_{*,x}=\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}.$$

(4) 向量场 V 的零点的集合 Z 可以表示为 $Z=Z_+\cup Z_-$，其中

$$Z_+=\{x\in M\,|\,G(x)=a\}=G^{-1}(a),$$

$$Z_-=\{x\in M\,|\,G(x)=-a\}=G^{-1}(-a).$$

根据(3)中得到的结论，对于任意的 $x\in Z$ 都有

$$\mathrm{Sgn}\,V_{*,x}=\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}.$$

利用环绕数与(局部)映射度之间的关系，对任意的 $x\in Z$ 容易得到

$$\mathrm{ind}_xV=\mathrm{Sgn}\,V_{*,x}=\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}.$$

据此，我们算出

$$\begin{aligned}\sum_{x\in Z}\mathrm{ind}_xV&=\sum_{x\in Z_+}\mathrm{ind}_xV+\sum_{x\in Z_-}\mathrm{ind}_xV\\&=\sum_{x\in Z_+}\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}+\sum_{x\in Z_-}\mathrm{Sgn}\,G_{*,x}\\&=\deg(G)+\deg(G)=2\deg(G).\end{aligned}$$

根据 Poincaré-Hopf 指标和定理，我们得到

$$\deg(G) = \frac{1}{2}\chi(M).$$

综合以上的讨论，我们已经证明了 Gauss-Bonnet 公式：

$$\int_M K(x)A_M(x) = \frac{1}{2}\gamma_n\chi(M). \qquad \square$$

练 习 L

L. 1. 设 $M=S_r^n$ 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的半径为 r 的球面. 试根据 Gauss 曲率的几何意义计算 M 的 Gauss 曲率.

L. 2. 试利用 Gauss-Bonnet 公式计算 S_r^{2n} 的 Euler 示性数.

解答下面的练习 L. 3 和 L. 4 需要知道紧致连通可定向的二维流形的拓扑分类.

L. 3. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的紧致超曲面，其 Gauss 曲率适合条件

$$K(p) \geqslant 0, \quad \forall p \in M,$$

并且 $K(p)$ 不恒等于 0. 试证 M 同胚于 S^2.

L. 4. 设 M 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的紧致超曲面，其 Gauss 曲率适合条件

$$K(p) > 0, \quad \forall p \in M.$$

试证明 Gauss 映射 $G: M \to S^2$ 是一个微分同胚.

L. 5. 设 n 是偶自然数，M 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的紧致超曲面，适合条件：

(1) $K(p)>0, \forall p \in M$;

(2) $\chi(M)=2$.

试证：M 微分同胚于 S^n.

附录 δ　外微分形式的积分与一般 Stokes 定理

§ δ.1　对偶空间及其外幂，Grassmann 代数

设 V 是给定的(有限维)实线性空间. 若映射 $f: V \to \mathbf{R}$ 满足这样的条件：

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ x, y \in V,$$

则称 f 为**线性函数**. 我们约定将定义于 V 上的所有线性函数的集合记为 V^*.

定义 δ.1.1　按照通常方式定义线性函数的加法运算及乘以实数的运算，V^* 成为一个线性空间. 我们把这样的线性空间 V^* 称为 V 的**对偶空间**.

注记 δ.1.2　对于 $f \in V^*$ 和 $x \in V$，常常把 f 在 x 点的值记为

$$\langle f, x\rangle := f(x).$$

容易看出：给定 V 的一组基底 $e_1, \cdots, e_n$ 之后，线性函数 $f \in V^*$ 由它在基底向量上的值所完全确定，即 f 由

$$\langle f, e_j\rangle, \quad j=1, \cdots, n$$

完全确定.

设选定了 V 的一组基底 $e_1, \cdots, e_n$. 则 $x \in V$ 可惟一地表示成

$$x=\sum_{j=1}^{n} x^j e_j. \tag{δ.1.1}$$

借助于表示式(δ.1.1),我们定义这样一些映射

$$f^k(x):=x^k,\quad k=1,\cdots,n.$$

容易看出 $f^k\in V^*$ $(k=1,\cdots,n)$并且

(δ.1.2) $$\langle f^i,e_j\rangle=\delta^i_j,\quad i,j=1,\cdots,n.$$

任何一个 $g\in V^*$ 都可以由 $f^1,\cdots,f^n$ 线性表出:

(δ.1.3) $$g=\sum_{i=1}^{n}\langle g,e_i\rangle f^i.$$

定理 δ.1.3 选定了 V 的一组基底 $e_1,\cdots,e_n$ 之后,由(δ.1.2)所决定的线性函数 $f^1,\cdots,f^n$ 构成 V^* 的一组基底(称为相应于 $e_1,\cdots,e_n$ 的**对偶基底**).因而对偶空间 V^* 的维数等于空间 V 的维数:

$$\dim V^*=\dim V=n.$$

证明 利用(δ.1.2)式容易证明 $f^1,\cdots,f^n$ 是线性无关的.由(δ.1.3)式可以看出 $f^1,\cdots,f^n$ 是 V^* 的生成组. □

设 V 是有限维实线性空间.我们约定以 V^p 表示 V 的 p 重乘积,即约定记

$$V^p=\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{p\text{个}V}.$$

定义 δ.1.4 (1) 如果映射 $\varphi:V^p\to\mathbf{R}$ 对任意的 $i\in\{1,\cdots,p\}$,$u_j(j\neq i),v,w\in V$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ 满足这样的条件:

$$\begin{aligned}&\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},\alpha v+\beta w,u_{i+1},\cdots,u_p)\\&=\alpha\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},v,u_{i+1},\cdots,u_p)\\&\quad+\beta\varphi(u_1,\cdots,u_{i-1},w,u_{i+1},\cdots,u_p),\end{aligned}$$

那么我们就称 φ 为 V 上的 **p 重线性函数**.

(2) V 上的 p 重线性函数 φ 被称为是**反对称**的,倘若对任意的 $u_1,\cdots,u_p\in V$ 和任意的 $i,j\in\{1,\cdots,p\}$, $i<j$,以下条件均

得以满足：

$$\varphi(u_1,\cdots,u_i,\cdots,u_j,\cdots,u_p) = -\varphi(u_1,\cdots,u_j,\cdots,u_i,\cdots,u_p).$$

(3) V 上所有的反对称 p 重线性函数组成的集合记为 $\wedge^p V^*$.

记号约定 δ.1.5 (1) 约定以 $\mathscr{S}_p$ 表示由$\{1,\cdots,p\}$的所有的置换组成的集合(这是一个有 $p!$ 个元素的群).

(2) 对于 $\sigma\in\mathscr{S}_p$,约定记

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{倘若 } \sigma \text{ 是偶置换}, \\ -1, & \text{倘若 } \sigma \text{ 是奇置换}. \end{cases}$$

(3) 设 V 是实线性空间,φ 是 V 上的 p 重线性函数,$\sigma\in\mathscr{S}_p$. 我们约定用记号 φ^σ 表示这样定义的一个 p 重线性函数：

$$\varphi^\sigma(u_1,\cdots,u_p) := \varphi(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)}).$$

(4) 设 V 是实线性空间,φ 是 V 上的 p 重线性函数. 我们约定用记号 $\mathscr{A}\varphi$ 表示按以下方式构作的一个 p 重线性函数：

$$\mathscr{A}\varphi := \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)\varphi^\sigma.$$

引理 δ.1.6 (1) $(\varphi^\sigma)^\tau=\varphi^{(\sigma\tau)}$.

(2) 如果 φ 是一个 p 重线性函数,那么 $\mathscr{A}\varphi$ 是一个反对称的 p 重线性函数.

(3) 如果 φ 本身是反对称的 p 重线性函数,那么

$$\varphi^\sigma = (\operatorname{sgn}\sigma)\varphi, \quad \mathscr{A}\varphi = (p!)\varphi.$$

证明 留作练习. □

定义 δ.1.7 设 V 是一个实线性空间.

(1) 如果 φ 和 ψ 分别是 V 上的 p 重和 q 重线性函数,那么按照以下方式定义的 $p+q$ 重线性函数 $\varphi\otimes\psi$ 被称为 φ 与 ψ 的张量积：

$$\varphi\otimes\psi(u_1,\cdots,u_p,u_{p+1},\cdots,u_{p+q})$$

$$:= \varphi(u_1,\cdots,u_p)\,\psi(u_{p+1},\cdots,u_{p+q}).$$

（请注意：$\varphi\otimes\psi\neq\psi\otimes\varphi$.）

（2）如果 $\varphi\in\Lambda^p V^*$，$\psi\in\Lambda^q V^*$，那么按照以下方式定义的 $\varphi\wedge\psi\in\Lambda^{p+q}V^*$ 被称为 φ 与 ψ 的外乘积：

$$\varphi\wedge\psi := \frac{1}{p!q!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).$$

引理 δ.1.8 设 V 是实线性空间，φ 和 ψ 分别是 V 上的 r 重和 s 重线性函数，则有

(1) $\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)=(-1)^{rs}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)$；

(2) $\mathscr{A}((\mathscr{A}\varphi)\otimes\psi)=r!\,\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)$，

$\mathscr{A}(\varphi\otimes(\mathscr{A}\psi))=s!\,\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)$.

证明 (1) 以 η 表示这样一个置换：

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & s & s+1 & \cdots & s+r \\ r+1 & \cdots & r+s & 1 & \cdots & r \end{pmatrix},$$

则有

$$\operatorname{sgn}\eta=(-1)^{rs},\quad \varphi\otimes\psi=(\psi\otimes\varphi)^{\eta}.$$

因而

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi) &= \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\varphi\otimes\psi)^{\sigma} \\ &= \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\psi\otimes\varphi)^{\eta\sigma} \\ &= (-1)^{rs}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\eta\sigma)(\psi\otimes\varphi)^{\eta\sigma} \\ &= (-1)^{rs}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi).\end{aligned}$$

（2）我们约定把 $\tau\in\mathscr{S}_r$ 也看成是 $\mathscr{S}_{r+s}$ 的这样一个元素：

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & r+s \\ \tau(1) & \cdots & \tau(r) & r+1 & \cdots & r+s \end{pmatrix}.$$

计算得到

$$\mathscr{A}((\mathscr{A}\varphi)\otimes\psi)=\mathscr{A}\left(\left(\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\varphi^{\tau}\right)\otimes\psi\right)$$

$$=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\mathscr{A}((\varphi^{\tau})\otimes\psi)$$

$$=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\mathscr{A}((\varphi\otimes\psi)^{\tau})$$

$$=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}(\operatorname{sgn}\tau)\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}\sigma)(\varphi\otimes\psi)^{\tau\sigma}$$

$$=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_{r+s}}(\operatorname{sgn}(\tau\sigma))(\varphi\otimes\psi)^{\tau\sigma}$$

$$=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_r}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)=r!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).$$

$$\mathscr{A}(\varphi\otimes(\mathscr{A}\psi))=(-1)^{rs}\mathscr{A}((\mathscr{A}\psi)\otimes\varphi)$$

$$=(-1)^{rs}s!\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)$$

$$=s!\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi).\quad\square$$

命题 δ.1.9 外乘积运算 $\wedge$ 具有以下性质：

(1) $\varphi\wedge\psi$ 关于 φ 和 ψ 分别都是线性的；

(2) 如果 $\varphi\in\wedge^r V^*$，$\psi\in\wedge^s V^*$，那么

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{rs}\psi\wedge\varphi;$$

(3) 运算 $\wedge$ 是结合的，即

$$(\varphi\wedge\psi)\wedge\theta=\varphi\wedge(\psi\wedge\theta);$$

(4) 对于 $\varphi_i\in\wedge^{r_i}V^*$ $(i=1,\cdots,k)$ 有

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_k=\frac{1}{r_1!\cdots r_k!}\mathscr{A}(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_k).$$

证明 (1) 是显然的. 下面证明(2)，(3)和(4).

(2) $$\varphi\wedge\psi=\frac{1}{r!s!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)$$

$$=(-1)^{rs}\frac{1}{s!r!}\mathscr{A}(\psi\otimes\varphi)=(-1)^{rs}\psi\wedge\varphi.$$

(3) 设 $\varphi\in\wedge^r V^*$，$\psi\in\wedge^s V^*$，$\theta\in\wedge^t V^*$，则有

$$(\varphi\wedge\psi)\wedge\theta=\frac{1}{(r+s)!t!}\mathscr{A}((\varphi\wedge\psi)\otimes\theta)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!t!}\mathscr{A}\left(\frac{1}{r!s!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta\right)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}\mathscr{A}(\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)$$

$$=\frac{1}{(r+s)!r!s!t!}(r+s)!\mathscr{A}((\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)$$

$$=\frac{1}{r!s!t!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta).$$

同样可以证明

$$\varphi\wedge(\psi\wedge\theta)=\frac{1}{r!s!t!}\mathscr{A}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta).$$

(4) 仿照(3)证明中的作法，对 k 归纳，就可得到(4)的证明. □

记号约定 δ. 1. 10 设 V 是 n 维实线性空间，我们以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集.

(1) 设 $i_1,\cdots,i_p\in\{1,\cdots,n\}$，我们称 $I=(i_1,\cdots,i_p)$ 为 p 阶重指标.

(2) 设 $j_1,\cdots,j_p\in\{1,\cdots,n\}$ 适合条件

$$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_p\leqslant n,$$

则称 $J=(j_1,\cdots,j_p)$ 为 p 阶上升重指标.

(3) 约定以 $\mathscr{I}_p=\mathscr{I}_p(n)$ 表示所有的(以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集的) p 阶重指标的集合；约定以 $\mathscr{J}_p=\mathscr{J}_p(n)$ 表示(以 $\{1,\cdots,n\}$ 为基本标号集的) p 阶上升重指标的集合. 显然有 $\mathscr{J}_p\subset\mathscr{I}_p$.

(4) 设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底. 对于 $I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathscr{I}_p$，我们约定记

$$e_I=(e_{i_1},\cdots,e_{i_p}).$$

(5) 设 φ 是从 V^p 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射. 对于 $I=(i_1,\cdots,i_p)\in\mathscr{I}_p$，我

们约定记

$$\varphi(e_I) = \varphi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_p}).$$

(6) 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基底，$f^1, \cdots, f^n$ 是相应的对偶基底. 对于 $I = (i_1, \cdots, i_p) \in \mathscr{I}_p$，我们约定记

$$f^I = f^{i_1} \wedge \cdots \wedge f^{i_p}.$$

命题 δ. 1. 11 设 V 是 n 维实线性空间，$e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基底，$f^1, \cdots, f^n$ 是相应的对偶基底.

(1) 对于 $p \leqslant n$，任何一个 $\varphi \in \wedge^p V^*$ 由它在各 $e_J (J \in \mathscr{I}_p)$ 上的值完全确定：

(δ. 1. 4)
$$\varphi = \sum_{J \in \mathscr{I}_p} \varphi(e_J) f^J.$$

(2) 对于 $p \leqslant n$，反对称 p 重线性函数

$$f^J, \quad J \in \mathscr{I}_p$$

构成 $\wedge^p V^*$ 的一组基底. 因而

$$\dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}.$$

(3) 对于 $q > n$，

$$\wedge^q V^* = \{0\}.$$

证明 对于 $J, K \in \mathscr{I}_p$，约定记

$$\delta^J_K = \begin{cases} 1, & \text{如果 } J = K, \\ 0, & \text{如果 } J \neq K. \end{cases}$$

容易验证

(δ. 1. 5)
$$f^J(e_K) = \delta^J_K.$$

(1) 由于 p 重线性性质和反对称性质，显然任何一个 $\varphi \in \wedge^p V^*$ 由它在各个 $e_K (K \in \mathscr{I}_p)$ 上的值所完全决定. 因为 (δ. 1. 4) 等号两边的式子在各 $e_K (K \in \mathscr{I}_p)$ 上的值完全一致，所以该等式成立.

(2) 根据(δ. 1. 4),反对称 p 重线性函数 $f^J, J\in\mathscr{I}_p$ 生成 $\wedge^p V^*$. 根据(δ. 1. 5),很容易验证这些 $f^J(J\in\mathscr{I}_p)$是线性无关的,因而构成 $\wedge^p V^*$ 的基底. 由此得知

$$\dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}.$$

(3) 设 $q>n$. 对于

$$u_s = \sum_{t=1}^{n} \lambda_{st} e_t, \quad s = 1,\cdots,q,$$

利用 $\varphi\in \wedge^q V^*$ 的多重线性性质可得

$$\varphi(u_1,\cdots,u_q) = \sum_{t_1,\cdots,t_q=1}^{n} \lambda_{1t_1}\cdots\lambda_{qt_q}\varphi(e_{t_1},\cdots,e_{t_q}).$$

因为 $q>n$,所以在 $e_{t_1},\cdots,e_{t_q}$ 之中必有两个相同的. 利用 φ 的反对称性质,容易看出 $\varphi(e_{t_1},\cdots,e_{t_q})=0$. 这证明了

$$\wedge^q V^* = \{0\}. \qquad \square$$

附注 如果不限于 p 阶上升重指标,那么我们可以把(δ. 1. 4)式改写为

(δ. 1. 6) $$\varphi = \frac{1}{p!}\sum_{I\in\mathscr{I}_p} \varphi(e_I) f^I.$$

记号约定 δ. 1. 12 设 V 是 n 维实线性空间,V^* 是其对偶空间,我们约定记:

$$\wedge^0 V^* = \boldsymbol{R}, \quad \wedge^1 V^* = V^*,$$

$$\wedge V^* = \wedge^0 V^* \oplus \wedge^1 V^* \oplus \cdots \oplus \wedge^n V^*.$$

定理 δ. 1. 13 $\wedge V^*$ 连同所定义的加法,数乘和外乘运算构成一个代数,称之为**外代数**或 **Grassmann 代数**. 该代数的维数为

$$\dim \wedge V^* = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

附注 对于 $p\leqslant n$,容易看出

$$\wedge^p V^* = \underbrace{V^* \wedge \cdots \wedge V^*}_{p\text{个}V^*},$$

因而 $\wedge^p V^*$ 被称为 V^* 的 p 重外幂空间. 如果 $p+q>n$,那么对于 $\varphi\in\wedge^p V^*$ 和 $\psi\in\wedge^q V^*$, 显然有 $\varphi\wedge\psi=0$.

定义 δ.1.14 设 V 和 W 是(有限维)实线性空间. 约定以 $L(V,W)$表示所有从 V 映入 W 的线性映射组成的集合. 对于 $A\in L(V,W)$和 $\psi\in\wedge^p W^*$,我们定义这样一个 $A^*\psi\in\wedge^p V^*$:

$$A^*\psi(v_1,\cdots,v_p):=\psi(Av_1,\cdots,Av_p).$$

于是,由 $A\in L(V,W)$诱导了一个线性映射

$$A^*\in L(\wedge^p W^*,\ \wedge^p V^*).$$

命题 δ.1.15 对于 $\varphi\in\wedge^p W^*$, $\psi\in\wedge^q W^*$ 和 $A\in L(V,W)$, 以下等式成立:

$$A^*(\varphi\wedge\psi)=(A^*\varphi)\wedge(A^*\psi). \qquad \square$$

命题 δ.1.16 设 V 是 n 维实线性空间, $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基底, $A\in L(V,V)$经由这组基底表示为

$$Ae_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

则对任何一个 $\varphi\in\wedge^n V^*$ 有

$$A^*\varphi=\det(a_{ij})\varphi.$$

证明 根据定义,容易算出

$$\begin{aligned}A^*\varphi(e_1,\cdots,e_n)&=\varphi(Ae_1,\cdots,Ae_n)\\&=\varphi\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1},\cdots,\sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right)\\&=\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\varphi(e_{\sigma(1)},\cdots,e_{\sigma(n)})\end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \varphi(e_1, \cdots, e_n)$$

$$= \det(a_{ij}) \varphi(e_1, \cdots, e_n).$$

这证明了 $A^* \varphi = \det(a_{ij}) \varphi$. □

§δ.2 余切丛与余切外幂丛，外微分形式

定义 δ.2.1 设 M 是一个微分流形，$p \in M$. 我们把切空间 $T_p M$ 的对偶空间

$$T_p^* M := (T_p M)^*$$

定义为 M 在 p 点的**余切空间**.

设 f 是在 p 点邻近有定义并且连续可微的实值函数，γ 是 M 上通过 p 点的一条连续可微曲线($\gamma(0) = p$). 对于 γ 所决定的切向量$[\gamma] \in T_p M$，我们定义

$$(\delta.2.1) \qquad \mathrm{d}f([\gamma]) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma(t)) \bigg|_{t=0}.$$

选取 M 在 p 点邻近的局部坐标图卡(U, φ)，可以将 $\mathrm{d}f([\gamma])$表示为

$$(\delta.2.2) \quad \mathrm{d}f([\gamma]) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}((f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t)) \bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}(\pi^i \circ \varphi \circ \gamma(t))}{\mathrm{d}t} \bigg|_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right) \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

这里(且在以后许多类似的情形中)，我们采用了如下的简化记

号：

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1}(x))}{\partial x^i}\right|_{x=\varphi(p)},\qquad \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\left.\frac{\mathrm{d}(\pi^i\circ\varphi\circ\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0},$$

其中的 π^i 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 向其第 i 个因子空间的投影.

从(δ. 2. 2)式可以看出，微分

$$\mathrm{d}f: T_pM\to\boldsymbol{R}$$

是一个线性函数，即

(δ. 2. 3) $$\mathrm{d}f\in T_p^*M.$$

特别地，对于局部坐标分量 $x^i=\pi^i\circ\varphi$ 的微分 $\mathrm{d}x^i$，有这样的关系

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial x^i}{\partial x^n}\right)\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}j,$$

也就是

(δ. 2. 4) $$\left\langle \mathrm{d}x^i,\frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j.$$

设 M 是 C^r 流形($r\geqslant 1$)，(U,φ)是 M 的局部坐标图卡，$(x^1,\cdots,x^n)$是由 φ 给出的局部坐标，$p\in U$. 从(δ. 2. 4)可以看出，余切空间 T_p^*M 的标架 $\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n$ 是切标架$\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}$的对偶标架(即对偶基底). 当 p 点在 U 中变动时，$(\mathrm{d}x^1,\cdots,\mathrm{d}x^n)$构成 $\coprod_{p\in U}T_p^*M$ 的标架场. 而当局部坐标改变的时候，局部标架场之间的变换是一个 C^{r-1}变换：

$$\mathrm{d}x^i=\sum_{k=1}^n\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\mathrm{d}y^k.$$

从以上的讨论可以看出：

$$(\delta.2.5)\qquad T^* M = \coprod_{p\in M} T_p^* M$$

构成以 M 为底的一个 C^{r-1} 向量丛. 类似地，考察局部标架场 $\mathrm{d}x^J(J\in\mathscr{J}_k)$ 可知：

$$(\delta.2.6)\qquad \wedge^k T^* M = \coprod_{p\in M} \wedge^k T_p^* M$$

构成以 M 为底的一个 C^{r-1} 向量丛.

定义 δ.2.2 向量丛(δ.2.5)和(δ.2.6)分别被称为 M 的**余切丛**和(k 次)**余切外幂丛**.

定义 δ.2.3 设 M 是一个 C^r 流形($r\geqslant 1$). 余切外幂丛 $\wedge^k T^* M$ 的 C^s 截面($s\leqslant r-1$)被称为 k 次 C^s **外微分形式**.

借助于局部坐标，k 次外微分形式 ω 表示为

$$(\delta.2.7)\qquad \begin{aligned}\omega &= \sum_{J\in\mathscr{J}_k} g_J(x)\mathrm{d}x^J\\ &= \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n} g_{j_1\cdots j_k}(x)\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_k}.\end{aligned}$$

容易看出：当且仅当表示式(δ.2.7)的各个系数 $g_J(x)(J\in\mathscr{J}_k)$ 是 C^s 函数时($s\leqslant r-1$)，ω 是 C^s 形式.

定义 δ.2.4 设 M 和 N 是 C^r 流形($r\geqslant 1$)，$f\in C^r(M,N)$. 切线性映射

$$f_{*,p}: T_pM\to T_{f(p)}N$$

诱导了从 $\wedge^k T^*_{f(p)}N$ 到 $\wedge^k T_p^* M$ 的线性映射 f_p^*. 对于 N 上的 k 次外微分形式 ω，我们定义

$$(f^*\omega)_p := f_p^*(\omega_{f(p)}).$$

于是，$f^*\omega$ 是定义于 M 上的一个 k 次外微分形式.

对于 N 上的 0 次外微分形式，即连续可微函数 g，我们将 $f^* g$ 定义为这样一个函数：$(f^* g)(p)=g(f(p))$.

引理 δ.2.5 对于如上定义的 f^*，有以下这些关系：

(1) $f^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1 f^*\omega_1+\lambda_2 f^*\omega_2 (\lambda_1,\lambda_2\in\boldsymbol{R})$；

(2) $f^*(\omega\wedge\theta)=f^*\omega\wedge f^*\theta$；

(3) $(g\circ f)^*\omega=f^*(g^*\omega)$.

证明 留作练习. □

例 δ.2.6 设 U 和 V 分别是 $\boldsymbol{R}^m$ 和 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，$f\in C^1(U,V)$. 约定以 $(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $(y^1,\cdots,y^n)$ 分别表示 U 和 V 中的坐标，则有：

(1) $f^*\mathrm{d}y^j=\sum\limits_{i=1}^m\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i=\mathrm{d}f^j$；

(2) 设 $\omega=\sum g_I(y)\mathrm{d}y^I$ 是 V 上的一个 k 次外微分形式，则 $f^*\omega$ 是 U 上的这样一个 k 次外微分形式

$$f^*\omega=\sum_I g_I(f(x))f^*\mathrm{d}y^I=\sum_I g_I(f(x))\mathrm{d}f^I;$$

(3) 特别地，对于 $m=n$ 的情形，设 ω 是 V 上的 n 次外微分形式，则有

$$\begin{aligned}\omega&=g(y)\mathrm{d}y^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^n,\\ f^*\omega&=g(f(x))\mathrm{d}f^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}f^n\\ &=g(f(x))\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^n.\end{aligned}$$

§δ.3 外微分运算 d

为了避免琐碎的细节，本附录以下将只限于讨论 C^∞ 的情形.

记号约定 δ.3.1 设 M 是 n 维光滑流形. 我们约定将 M 上的所有光滑的 k 次外形式组成的集合记为 $\Omega^k(M)$. 我们还约定

记

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M,\boldsymbol{R});$$

$$\Omega^{n+l}(M) = \{0\}, \quad l = 1,2,\cdots;$$

$$\Omega(M) = \Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M) \oplus \cdots \oplus \Omega^n(M) \oplus \cdots.$$

注记 δ.3.2 设 $f\in\Omega^0(M)=C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，则对每个 $p\in M$，$(\mathrm{d}f)_p$ 是从 T_pM 到 $\boldsymbol{R}$ 的线性映射，即 $(\mathrm{d}f)_p\in T_p^*M$. 由此可见 $\mathrm{d}f$ 是 T^*M 的光滑截面. 因而 $\mathrm{d}f\in\Omega^1(M)$.

定理 δ.3.3 设 M 是 n 维光滑流形，则存在惟一的运算（称之为外微分运算）

$$\mathrm{d}: \Omega(M) \to \Omega(M),$$

适合以下这些条件：

(D_1) 如果 $f\in\Omega^0(M)=C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，那么 $\mathrm{d}f$ 如注记 δ.3.2 中所述；

(D_2) d 是线性的，即

$$\mathrm{d}(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1\mathrm{d}\omega_1 + \lambda_2\mathrm{d}\omega_2,$$

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in\boldsymbol{R}, \quad \omega_1,\omega_2\in\Omega(M);$$

(D_3) 如果 $\omega\in\Omega^s(M)$，那么

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta) = \mathrm{d}\omega\wedge\theta + (-1)^s\omega\wedge\mathrm{d}\theta;$$

(D_4) 对于 $f\in\Omega^0(M)=C^\infty(M,\boldsymbol{R})$，

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0.$$

我们把定理 δ.3.3 的证明分解为以下的引理 δ.3.4，引理 δ.3.5 和引理 δ.3.6.

引理 δ.3.4 满足定理 δ.3.3 中条件(D_1)～(D_4)的运算 d 具有局部性. 这就是说：如果 U 是 M 的任意开集，那么 $(\mathrm{d}\omega)|U$ 完全由 $\omega|U$ 所决定.

证明 假设 $\omega|U=\theta|U$，将证明：$(\mathrm{d}\omega)|U=(\mathrm{d}\theta)|U$.

以 $\omega-\theta$ 代替 ω，只须证明

$$\omega|U=0 \Longrightarrow (\mathrm{d}\omega)|U=0.$$

对于任意一点 $p\in U$，选择闭包为紧致集的开集 W，使得

$$p\in W\subset\overline{W}\subset U.$$

然后选择 $f\in C^{\infty}(M,\boldsymbol{R})$，适合条件

$$f(q)=\begin{cases}1, & \forall q\in\overline{W},\\ 0, & \forall q\in M\backslash U.\end{cases}$$

于是有 $f(q)\omega(q)\equiv 0, \forall q\in M$. 根据条件($D_1$)和($D_3$)，

$$0=\mathrm{d}(f\omega)=\mathrm{d}f\wedge\omega+f\mathrm{d}\omega.$$

因为 $\mathrm{d}f(p)=0$ 且 $f(p)=1$，所以

$$(\mathrm{d}\omega)(p)=f(p)(\mathrm{d}\omega)(p)=0.$$

又因为 p 是 U 中任意一点，所以

$$(\mathrm{d}\omega)|U=0. \qquad \square$$

引理 δ.3.5 满足定理 δ.3.3 中条件(D_1)～(D_4)的运算 d 是惟一确定的.

证明 由于引理 δ.3.4，只须限制到一个局部坐标域上加以考察. 基于线性性质(D_2)，不妨设 $\omega\in\Omega^k(U)$是这样一个"单项"形式

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

根据(D_1)，(D_3)和(D_4)可得

$$\mathrm{d}\omega=\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

由此可见，满足条件(D_1)～(D_4)的运算 d 具有惟一确定性. □

引理 δ.3.6 满足定理 δ.3.3 中条件(D_1)～(D_4)的运算 d 确实存在.

证明 先设 U 是 M 的一个局部坐标域，并设 $\omega\in\Omega^k(U)$是这样一个"单项"形式：

$$\omega=f(x)\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

从引理 δ. 3. 5 的证明得到启发，我们定义

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

特别地，对于 $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U, \boldsymbol{R})$，这里的定义与注记 δ. 3. 2 中所述的一致. 按照线性原则，可以将上面所定义的运算 d 扩展到所有的 $\omega \in \Omega(U)$.

下面验证所定义的运算

$$\mathrm{d} : \Omega(U) \to \Omega(U)$$

满足(相应于 U 的)条件(D_1)～(D_4). 我们定义的方式已经保证了(D_1)和(D_2)成立. 为了验证(D_3)，不妨设

$$\omega = f(x)\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_s} = f(x)\mathrm{d}x^I,$$

$$\theta = g(x)\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_t} = g(x)\mathrm{d}x^J.$$

于是

$$\omega \wedge \theta = f(x)g(x)\mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J.$$

根据我们的定义

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(w \wedge \theta) &= \mathrm{d}(f \cdot g) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J = (g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g) \wedge \mathrm{d}x^I \wedge \mathrm{d}x^J \\ &= (\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^I) \wedge (g\mathrm{d}x^J) + (-1)^s(f\mathrm{d}x^I) \wedge (\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}x^J) \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \theta + (-1)^s \omega \wedge \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

下面验证(D_4). 从 $\mathrm{d}f$ 的表示式

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$$

可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}f) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j + \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j.\end{aligned}$$

在最后一个和式中交换“哑指标”i 和 j 的地位就得到

$$d(df) = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i$$

$$= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

上面，对于 M 的任意一个局部坐标域 U 定义了

$$d_U : \Omega(U) \to \Omega(U).$$

对于一般的 $\omega \in \Omega(M)$ 和任意的 $p \in M$，我们可以任意选取一个包含 p 点的局部坐标域 U，然后定义

$$(d\omega)_p = (d_U(\omega|U))_p.$$

如果 M 的两个局部坐标域 U 和 V 都含有 p 点，那么由于引理 δ. 3. 4 和引理 δ. 3. 5，

$$(d_U(\omega|U))_p = (d_{U\cap V}(\omega|U \cap V))_p,$$

$$(d_V(\omega|V))_p = (d_{U\cap V}(\omega|U \cap V))_p,$$

$$(d_U(\omega|U))_p = (d_V(\omega|V))_p.$$

因而所作的定义确当无歧义. □

定理 δ. 3. 7 设 M 和 N 是光滑流形，$f \in C^\infty(M,N)$，$\omega \in \Omega(N)$，则有

$$d(f^* \omega) = f^* d\omega.$$

证明 先取 N 的局部坐标域 V，然后选取 M 的局部坐标域 U，使得 $f(U) \subset V$. 鉴于 d 和 f^* 定义的局部性质，我们可以限制在 U 上验证

$$d(f^* \omega)|U = f^* d\omega|U.$$

不妨设

$$\omega = g(y) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k} = g(y) dy^I.$$

于是

$$d(f^* \omega) = d(g(f(x)) df^I) = d(g(f(x))) \wedge df^I$$

$$= f^* \mathrm{d}g(y) \wedge f^* \mathrm{d}y^I = f^* (\mathrm{d}g(y) \wedge \mathrm{d}y^I)$$
$$= f^* \mathrm{d}\omega. \qquad \square$$

§ δ. 4 微分形式的积分与一般 Stokes 定理

定义 δ. 4. 1 设 M 是一个 C^∞ 流形，$\omega \in \Omega^k(M)$. M 的子集合

$$\mathrm{supp}\omega = \overline{\{p \in M \mid \omega(p) \neq 0\}}$$

被称为是 ω 的**支集**(或**支撑集**).

若 $\mathrm{supp}\omega$ 是紧致的，则称 ω 为**紧支形式**. 约定将 M 上所有的 k 次紧支光滑形式的集合记为 $\Omega_c^k(M)$. 我们还约定记

$$\Omega_c(M) = \Omega_c^0(M) \oplus \Omega_c^1(M) \oplus \cdots$$
$$\cdots \oplus \Omega_c^n(M) \oplus \cdots.$$

定义 δ. 4. 2 设 M 是定向的 n 维 C^∞ 流形，(U, φ)是 M 的一个正向局部坐标图卡，$\omega \in \Omega_c^n(M)$适合条件 $\mathrm{supp}\omega \subset U$. 于是 ω 可表示成

(δ. 4. 1) $$\omega = f(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

对这种情形，我们定义

$$\int \omega \ := \int_{\varphi(U)} f(x)\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^n,$$

这里等号右边的积分就是通常的 n 重积分.

命题 δ. 4. 3 上面定义中的 $\int \omega$ 不依赖于局部坐标图卡的具体选择.

证明 设(V, ψ)是 M 的另一个正向局部坐标图卡，也适合条件 $\mathrm{supp}\omega \subset V$. 则在 $U \cap V$ 上，ω 具有两种局部坐标表示：由(U, φ)所决定的(δ. 4. 1)和由(V, ψ)所决定的

(δ. 4. 2) $$\omega = g(y)\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n.$$

按照微分形式的坐标变换法则，应有

$$g(y)=f((\varphi\circ\psi^{-1})(y))\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}$$

$$=f((\varphi\circ\psi^{-1})(y))\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|.$$

利用重积分的变元替换法则可得

$$\int_{\varphi(U)}f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

$$=\int_{\varphi(U\cap V)}f(x)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^n$$

$$=\int_{\psi(U\cap V)}f(\varphi\circ\psi^{-1}(y))\left|\frac{\partial(x^1,\cdots,x^n)}{\partial(y^1,\cdots,y^n)}\right|\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n$$

$$=\int_{\psi(U\cap V)}g(y)\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n$$

$$=\int_{\psi(V)}g(y)\mathrm{d}y^1\cdots\mathrm{d}y^n.\qquad\square$$

引理 δ.4.4 设(U,φ)是M的正向局部坐标图卡．如果ω_0，$\omega_1,\cdots,\omega_s\in\Omega_c^n(M)$适合条件：

(1) $\mathrm{supp}\omega_i\subset U$，$i=0,1,\cdots,s$；

(2) $\omega_0=\omega_1+\cdots+\omega_s$，

那么
$$\int\omega_0=\int\omega_1+\cdots+\int\omega_s.$$

定义 δ.4.5 设M是定向的n维光滑流形，$\omega\in\Omega_c^n(M)$．任取M的一个局部有限的正向局部坐标图汇$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$和从属于覆盖$\{U_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$的一个单位分解$\{\eta_\alpha\,|\,\alpha\in A\}$：

$$\eta_\alpha\in C_c^\infty(M,\boldsymbol{R}),\quad \mathrm{supp}\eta_\alpha\subset U_\alpha,\quad \sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\equiv 1.$$

于是可将ω表示为

$$\omega=\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\omega,\quad \mathrm{supp}\eta_\alpha\omega\subset U_\alpha.$$

我们定义

$$(\delta.4.3)\qquad \int \omega := \sum_{\alpha\in A} \int \eta_\alpha \omega.$$

因为 $\operatorname{supp}\omega$ 仅与有限个 U_α 有非空的交集，所以(δ. 4. 3)的右端实际上只是有限个积分之和.

命题 δ. 4. 6 定义 δ. 4. 5 不依赖于局部有限的正向图汇和相应的单位分解的选取.

证明 考察 M 的另一个局部有限的正向图汇 $\{(V_\beta,\psi_\beta)\mid\beta\in B\}$ 和相应的单位分解

$$\rho_\beta\in C_c^\infty(M,\boldsymbol{R}),\quad \operatorname{supp}\rho_\beta\subset V_\beta,\quad \sum_{\beta\in B}\rho_\beta\equiv 1.$$

我们有

$$\eta_\alpha\omega = \eta_\alpha\sum_{\beta\in B}\rho_\beta\omega = \sum_{\beta\in B}\eta_\alpha\rho_\beta\omega,\quad \rho_\beta\omega = \sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha\rho_\beta\omega.$$

由引理 δ. 4. 4 可知

$$\int\eta_\alpha\omega = \sum_{\beta\in B}\int\eta_\alpha\rho_\beta\omega,$$

$$\int\rho_\beta\omega = \sum_{\alpha\in A}\int\eta_\alpha\rho_\beta\omega.$$

利用这些关系，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A}\int\eta_\alpha\omega &= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B}\int\eta_\alpha\rho_\beta\omega\\ &= \sum_{\beta\in B}\sum_{\alpha\in A}\int\eta_\alpha\rho_\beta\omega\\ &= \sum_{\beta\in B}\int\rho_\beta\omega.\qquad\square\end{aligned}$$

为了叙述一般的 Stokes 定理，需要指明定向带边流形在其边缘流形上的诱导定向. 首先，我们约定记

$$\boldsymbol{R}_+^n = \{(x^0,x^1,\cdots,x^{n-1})\in\boldsymbol{R}^n \mid x^0\geqslant 0\}.$$

设 M 是定向的 n 维光滑带边流形，则对于任意的 $p\in\partial M$，存在

p 点邻近的正向局部坐标图卡(U,φ),使得 $\varphi(U)$是 $\boldsymbol{R}^n_+$ 中的开集合,并且

$$\varphi(U\cap\partial M)=\varphi(U)\cap(0\times\boldsymbol{R}^{n-1}).$$

这里

$$0\times\boldsymbol{R}^{n-1}=\{(0,x^1,\cdots,x^{n-1})\,|\,(x^1,\cdots,x^{n-1})\in\boldsymbol{R}^{n-1}\}.$$

容易验证:对于覆盖了 ∂M 的那些局部坐标图卡$(U_\lambda,\varphi_\lambda)$,相应的$(x^1,\cdots,x^{n-1})$构成 ∂M 的定向局部坐标.用这样的方式确定的 ∂M 的定向被称为:由 M 的定向确定的 ∂M 的**"内向型"诱导定向**.相反的定向被称为**"外向型"诱导定向**.

定理 δ.4.7(一般的 Stokes 定理) 设 M 是一个定向的 n 维光滑带边流形,$\omega\in\Omega_c^{n-1}(M)$.我们约定赋予 ∂M"外向型"诱导定向.则有以下**一般 Stokes 公式**:

$$\int_M \mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega.$$

特别地,当 M 是紧致流形时,这公式对任何 $\omega\in\Omega^{n-1}(M)$成立.

证明 设$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\,\alpha\in A\}$是覆盖 M 的一族局部有限的可数个正向图卡.我们将 ω 表示成这样一些紧支 $n-1$ 次形式之和

$$\omega=\sum_{\alpha\in A}\omega_\alpha,$$

使得

$$\operatorname{supp}\omega_\alpha\subset U_\alpha,\quad \forall\,\alpha\in A.$$

借助于$(U_\alpha,\varphi_\alpha)$的坐标,可将 ω_α 表示成

$$\omega_\alpha=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i g_i\mathrm{d}x^0\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x^i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}$$

$$(g_i\in C_c^\infty(U_\alpha,\boldsymbol{R}),\quad i=0,\cdots,n-1).$$

于是

$$\mathrm{d}\omega_\alpha=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^0\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^i\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{n-1}.$$

对于 $x=(x^0,x^1,\cdots,x^{n-1})\in \boldsymbol{R}_+^n$，我们约定记

$$x' = (\hat{x}^0,x^1,\cdots,x^{n-1}) = (x^1,\cdots,x^{n-1}),$$

$$x_i' = (x^0,\cdots,\hat{x}^i,\cdots,x^{n-1}) \quad (i = 1,\cdots,n-1).$$

还约定记

$$\boldsymbol{R}_i^{n-1} = \{x_i' \mid x\in \boldsymbol{R}_+^n\}.$$

以下分两种情形计算 $\int_M \mathrm{d}\omega_\alpha$.

情形 1. $U_\alpha\cap\partial M=\varnothing$. 对这种情形有

$$\int_M \mathrm{d}\omega_\alpha=\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\partial g_0}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0\right)\mathrm{d}x' + \sum_{i=1}^{n-1}\int_{\boldsymbol{R}_i^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial g_i}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\right)\mathrm{d}x_i'$$

$$= 0 = \int_{\partial M}\omega_\alpha.$$

情形 2. $U_\alpha\cap\partial M\neq\varnothing$. 对这种情形有

$$\begin{aligned}\int_M \mathrm{d}\omega_\alpha &= \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\partial g_0}{\partial x^0}\mathrm{d}x^0\right)\mathrm{d}x' + 0\\ &= -\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} g_0(0,x')\mathrm{d}x'\\ &= -\int_{(\partial M)^-}\omega_\alpha = \int_{\partial M}\omega_\alpha.\end{aligned}$$

在上面的计算中，我们以 $(\partial M)^-$ 表示 ∂M 的“内向型”诱导定向.

综合以上两种情形，我们得到

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \sum_{\alpha\in A}\int_M \mathrm{d}\omega_\alpha = \sum_{\alpha\in A}\int_{\partial M}\omega_\alpha = \int_{\partial M}\omega. \qquad \square$$

参 考 文 献

除了序言中提到的微分拓扑教材[1]～[6]而外，下面列举的著作也都是本书的参考文献.

[Ab] Abraham, R. and Marsden, J. E., *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[Au] Auslander, L. and Mackenzie, R. E., *Introduction to Differentiable Manifolds*, McGraw-Hill Book Company, 1963.

[Be] Berger, M. and Gostiaux, E., *Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces*, Springer-Verlag, 1988.

[Bi] Bishop, R. L. and Crittenden, R. J., *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.

[Bo] Boothby, W. M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* (2nd Ed.), Academic Press, 1986.

[Ch] 陈省身、陈维桓,《微分几何讲义》,北京大学出版社,北京,1983.

[De] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[Di] Dieudonné, J., *Treatise on Analysis*, Vol. Ⅱ, Academic Press, 1972.

[Du] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[Go] Golubitsky, M. and Guillemin, V. W., *Stable Mappings and Their Singularities*, Springer-Verlag, 1973.

[Gr] Gramain, A., *Topologie des Surfaces*, Presse Universitaire de France, 1971. (张耀成译,《曲面拓扑学》,科学出版社,北京,1981.)

[Ka] Kahn, D. W., *Introduction to Global Analysis*, Academic Press, 1980.

[Ko] Kosinski, A. A., *Differential Manifolds*, Academic Press, 1993.

[Ma] Maunder, C. R. F., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980.

[Mi] Milnor, J., *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.（江嘉禾译,《莫尔斯理论》,科学出版社,北京,1988.）

[Na] Narasimhan, R., *Analysis on Real and Complex Manifolds* (2nd Ed.), North Holland, Inc., 1973.（陆柱家译,《实流形和复流形上的分析》,科学出版社,北京,1986.）

[Si] Singer, I. M. and Thorpe, J. A., *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer-Verlag, 1967.（干丹岩译,《拓扑学与几何学基础讲义》,上海科学技术出版社,上海,1985.）

[Sp] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differetial Geometry*, Vol. I (2nd Ed.), Publish or Perish, Inc., 1979.

[St] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*, Printice-Hall, 1964.

[Wa] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and* Lie *Groups*, Springer-Verlag, 1983.

[Zh] 詹汉生,《微分流形导引》,北京大学出版社,北京,1987.

术 语 索 引

按中文首字笔画顺序排列(凡以外文字母开始的词组均归入一画). 每条术语后所附数码表示该术语在本书中出现的章,节.

一 画

一维流形分类　七,1

一般 Stokes 公式　附录 δ

1 的分解(Partition of unity)　二,4

Borsuk-Ulam 定理　八,3

Brouwer 不动点定理　七,2

C^∞ 映射　一,4

C^∞ 同胚　一,4

C^r 映射　一,4

C^r 同胚　一,4

C^r 相容　一,3

Euler 示性数　十一,6

Gauss 映射　十二,2

Gauss 曲率　十二,2

Gauss-Bonnet 公式　十二,2

Grassmann 代数　附录 δ

Hopf 定理　九,3

Jordan-Brouwer 分离定理　十,3

Jordan 曲线定理　十,3

Kronecker 存在性　十,2

Leray 乘积公式　十,2

Lindelöf 定理　二,1

Morse 函数　六,4

Poincaré-Hopf 定理　十一,6

Riemann 度量　四,3

Sard 定理　五,1

Whitney 浸入定理　三,2

Whitney 嵌入定理　三,3

σ 紧致　二,2

三 画

子流形(submanifold)　一,3

子丛(subbundle)　四,3

四 画

开映射　一,2

支集,支撑集(support)　二,4;六,1;十二,1

从属于(subordinated to)　二,1

反对称多重线性函数　附录 δ

区域不变性　十,3

切空间　一,5

切向量　一,5

切向量场　六,1

切丛　四,2

“内向型”诱导定向　九,1

五 画

“外向型”诱导定向　九,1

外乘积运算　附录 δ

外代数 附录δ
外微分形式 附录δ
外微分运算 附录δ
代数基本定理 一,2
可定向流形 九,1
可微映射 一,4
可平凡化向量丛 练习D
正则子流形 一,3
正则点(regular point) 五,1
正则值(regular value) 五,1
正则值原像定理 五,1
正交补丛 四,3
对偶空间 附录δ
平凡丛(trivial bundle) 四,2
边缘(boundry) 一,3
边缘点 一,3

六　　画

仿紧(paracompact) 二,3
闭映射 三,3
光滑映射 一,4
光滑同胚 一,4
同伦 四,1
同伦的光滑化 四,6
收缩核(retract) 七,2
收缩映射 七,2
全空间 四,2
向量丛 四,2
向量场 六,1
多重线性映射 附录δ

七　　画

局部 C^r 同胚 一,1;一,4
局部有限性 二,3
局部紧(locally compact) 二,2
局部坐标图卡(chart) 一,3
局部表示 一,4
局部平凡化 四,2
局部映射度 十,1
局部相交数 十一,3
余切向量 附录α;附录δ
余切空间 附录α;附录δ
余切丛 附录δ
余切外幂丛 附录δ
含参数的横截性定理 五,5

八　　画

图卡(chart) 一,3
图汇(atlas) 一,3
单位分解(partition of unity) 二,4
单浸入 三,2
单参数变换群 六,1
底空间 四,2
非退化临界点 六,4
奇映射 八,3
细分(refinement) 二,1
定向 C^r 图汇 九,1
定向 C^r 相容 九,1
定向映射度 九,2

定向环绕数 九,2
参数化 七,1
弧长式参数化 七,1

九　　画

面积形式(area form) 十二,2
面积微元 十二,2
标架场 四,2
映射的光滑化 四,6
映射度 九,2
映射度的积分表示 十二,1
映射的 Jacobian 十二,2
带边流形
(manifold with boundry) 一,3
临界点(critical point) 五,1
临界值(critical value) 五,1
相交数(intersection number) 十一,2
逆函数定理 一,1

十　　画

流(flow) 六,1
流形(manifold) 一,3
流形的匀齐性质 六,2
秩(rank) 一,4
紧生成空间 三,3
浸入(immersion) 一,4
浸入的典范表示 一,4

十　一　画

第二可数空间 二,1
淹没(submersion) 一,4
淹没的典范表示 一,4
维数(dimension) 一,3
常态映射
(proper mapping) 三,3
唱片引理
(stack of records lemma) 五,1

十二画及十二画以上

嵌入(embedding) 二,5
超曲面(hypersurface) 十,4
管状邻域定理 四,5
微分流形 一,3
微分流形的单纯剖分 十一,6
零截面 四,4
零测集 三,1
模 2 映射度 八,1
模 2 环绕数 八,2
模 2 相交数 十一,1
横截性(transversality) 五,2
横截的典范表示 五,2
横截原像定理 五,2
横截逼近定理 五,3;五,5
截面(cross section) 四,2

符 号 索 引

符号后所附数码表示该符号在本书中出现的章，节.

∂M（带边流形 M 的边缘） 一，3

$\tilde{f}$（映射 f 的局部表示） 一，4

$\mathrm{rank}_p f$（可微映射 f 在 p 点的秩） 一，4

M_p, T_pM（M 在 p 点的切空间） 一，5

φ_*（切空间的局部表示映射） 一，5

F_*（F 的切映射） 一，5

$<$（集合族的"从属"，又称"细分"） 二，1

B_ρ（中心在原点，半径为 ρ 的开球体） 二，3

$\mathrm{supp} f$（函数 f 的支集） 二，4

$C_c^\infty(M,\boldsymbol{R})$（紧支光滑函数的集合） 二，4

$|f|_K^{(0)}$（$f|K$ 的 C^0 模） 三，2

$|f|_K^{(1)}$（$f|K$ 的 C^1 模） 三，2

$\sim$ （同伦于） 四，1

S^n（n 维球面） 四，1

$\mathrm{GL}(\boldsymbol{R}^k)$（非退化 $k\times k$ 阶实数方阵的集合） 四，2

$\coprod$（不交并） 四，2

TM（切丛） 四，2

$F^\perp$（子丛 F 的正交补丛） 四，3

$C_f, C(f)$（f 的临界点集） 五，1

$\pitchfork$（横截） 五，2

$|F|_H^{(r)}$（$F|H$ 的 C^r 模） 五，4

$\mathscr{M}^{(r)}(f;\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{K},\mathscr{E})$（定义 C^r 强拓扑的基本邻域） 五，4

∂f（即 $f|\partial M$） 五，5

$\dot{\gamma}(t_0)$（曲线 $\gamma(t)$ 在参数 $t=t_0$ 处的切向量） 六，1

$\mathrm{supp}\Gamma$（向量场 Γ 的支集） 六，1

$\deg_2(f,y)$（f 对 y 的模 2 覆盖层数） 八，1

D_ε^{n+1}（$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中以 0 为中心 ε 为半径的闭球体） 八，2

S_ε^n（$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中以 0 为中心 ε 为半径的球面） 八，2

$W_2(f,z)$（f 对 z 的模 2 环绕数） 八，2

$\boldsymbol{R}_+^{1+n}$ 九，1

$\boldsymbol{R}_-^{1+n}$ 九，1

$\mathrm{Sgn} f_{*,p}$ 九，2

$\deg(f,y)$（f 对 y 的覆盖层数） 九，2

$W(f,z)$（f 对 z 的环绕数） 九，2

$d(f,\Omega,y)$ 十，1

$\partial\Omega$（即 $\overline{\Omega}\backslash\Omega$） 十，1

$d(f,\Omega,\Delta)$ 十，2

$I_2(f,S)$（f 与 S 的模 2 相交数） 十一,1

$\mathrm{Sgn}(f,S)_p$（f 与 S 在 p 点的相交符号） 十一,2

$I(f,S)$（f 与 S 的相交数） 十一,2

$I(f,\Omega,S)$（f 在 Ω 上与 S 的相交数） 十一,3

$\mathrm{ind}_p V$（向量场 V 在孤立零点 p 的指标） 十一,5

$\chi(M)$（流形 M 的 Euler 示性数） 十一,6

$\mathrm{supp}\omega$（微分形式 ω 的支集） 十二,1

$\Omega_c^k(M)$ 十二,1

$K(x)$（Gauss 曲率） 十二,2

$T_p^* M$（余切空间） 附录 δ

$T^* M$（余切丛） 附录 δ

$\wedge^k T_p^* M$（余切外幂空间） 附录 δ

$\wedge^k T^* M$（余切外幂丛） 附录 δ

$\wedge$（外乘法） 附录 δ

d（外微分运算） 附录 δ

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝微分拓扑新讲
作者＝张筑生著
页数＝３５１
ＳＳ号＝１０９６４９９５
出版日期＝２００２年０７月第１版

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
关于编号的说明
关于某些符号与用语的说明
第一章　预备知识
1　逆函数定理
2　代数基本定理的“拓扑”证明
3　微分流形
4　可微映射
5　切空间与切映射
附录α　函数芽的概念与余切空间
练习A
第二章　第二可数性质，仿紧性质与单位分解
1　第二可数性质
2　局部紧性质
3　仿紧性质
4　单位分解
5　紧流形嵌入Ｅｕｃｌｉｄ空间
练习B
第三章　Ｗｈｉｔｎｅｙ嵌入定理
1　零测集
2　Ｗｈｉｔｎｅｙ浸入定理
3　常态映射与Ｗｈｉｔｎｅｙ嵌入定理
练习C
第四章　向量丛与管状邻域定理，映射的光滑化与同伦的光滑化
1　引例
2　向量丛的概念
3　子丛，Ｒｉｅｍａｎｎ度量，正交补丛
4　管状邻域定理证明的准备
5　管状邻域定理
6　映射的光滑化与同伦的光滑化
附录β　更一般的管状邻域定理
练习D
第五章　正则值与横截性
1　正则值与Ｓａｒｄ定理
2　横截性
3　横截逼近定理
4　关于映射的Ｃｒ拓扑与Ｃｒ意义下的逼近
5　参数横截性定理与涉及带边流形的定理
附录γ　Ｓａｒｄ定理的证明
练习E

第六章　向量场与流，Ｍｏｒｓｅ函数
　　１　向量场与流
　　２　流形的匀齐性
　　３　带边流形的领圈邻域与倍流形
　　４　Ｍｏｒｓｅ函数
　　练习Ｆ
第七章　一维流形的分类与Ｂｒｏｕｗｅｒ不动点定理
　　１　一维微分流形的分类
　　２　Ｂｒｏｕｗｅｒ不动点定理
　　练习Ｇ
第八章　模２映射度与Ｂｏｒｓｕｋ－Ｕｌａm定理
　　１　模２映射度
　　２　模２环绕数
　　３　Ｂｏｒｓｕｋ－Ｕｌａm定理
　　练习Ｈ
第九章　定向映射度与Ｈｏｐｆ定理
　　１　可定向流形
　　２　定向映射度与定向环绕数
　　３　Ｈｏｐｆ定理
　　练习Ｉ
第十章　局部映射度，Ｌｅｒａｙ乘积公式与Ｊｏｒｄａｎ－Ｂｒｏｕｗｅｒ分离定理
　　１　映射度定义的局部化
　　２　Ｌｅｒａｙ乘积公式
　　３　Ｊｏｒｄａｎ－Ｂｒｏｕｗｅｒ分离定理
　　４　紧致超曲面的分离性质
　　练习Ｊ
第十一章　相交数，向量场奇点的指标与Ｐｏｉｎｃａｒｅ－Ｈｏｐｆ定理
　　１　模２相交数
　　２　定向相交数
　　３　相交数定义的局部化
　　４　向量丛截面的光滑化与横截逼近
　　５　向量场孤立零点的指标
　　６　Ｐｏｉｎｃａｒｅ－Ｈｏｐｆ定理
　　练习Ｋ
第十二章　映射度的积分表示与Ｇａｕｓｓ－Ｂｏｎｎｅｔ公式
　　１　映射度的积分表示
　　２　Ｇａｕｓｓ－Ｂｏｎｎｅｔ公式
　　练习Ｌ
附录δ　外微分形式的积分与一般Ｓｔｏｋｅｓ定理
参考文献
术语索引
符号索引
附录页